



TITLE:

シングルリード木管楽器の発音機構

AUTHOR(S):

橘, 崇哲

CITATION:

橘, 崇哲. シングルリード木管楽器の発音機構. 物性研究 1997, 67(4): 468-510

ISSUE DATE:

1997-01-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95971>

RIGHT:

シングルリード木管楽器の発音機構

九州工業大学大学院情報工学研究科情報システム専攻

橘崇哲

目次

1 序論	469
2 木管楽器の概要とシングルリード木管楽器のモデル化	471
2.1 木管楽器の概要と基礎的理論	471
2.1.1 木管楽器とは	471
2.1.2 マウスピース	473
2.1.3 共鳴気柱(管体)	474
2.2 シングルリード木管楽器のモデル化	476
2.2.1 Schumacher モデル	476
2.2.2 MSW モデル	477
3 井戸川グループによる木管楽器の人工吹鳴実験	479
3.1 概要	479
3.2 クラリネット	479
3.3 円筒管	480
4 クラリネットのモデル化	485
4.1 概要	485
4.2 反射関数	485
4.3 Schumacher モデル	486
4.4 MSW モデルとその低次元化	487
5 計算機シミュレーションの結果及び考察	490
5.1 MSW モデル—吹鳴圧のステップ入力に対する応答	490
5.1.1 概要	490
5.1.2 ガウス関数型反射関数の場合	491
5.1.3 $t_{r2}/t_{r1} = 2$ — 2次元写像の振舞	492
5.1.4 高次元写像での振舞	495
5.2 Schumacher モデル—吹鳴圧の断熱変化に対する応答	496
5.3 議論	500
6 結論	506
A 基本的な波形パターンの生成規則	507
B 反射関数と音響インピーダンスの関係	508

1 序論

楽器は太古から人間に親しまれその文化を形作ってきた重要な道具の1つである。そして長い文化史の中で、多くの人々が楽器を発明し改良しその発音機構を理解しようと試みてきた。それに関わらず楽器の発音機構が物理的に十分解明されたとはいえない。その理由としては、研究対象となる分野が波動論や流体力学、機械力学等多岐に渡りモデル化が難しい事、高度な実験技術が必要である事、楽器にとって最も大切な”音色”を客観的に評価する事が不可能である事、等が考えられる。しかし近年の測定技術やコンピュータの発達によりこの状況は変わりつつある。本研究ではシングルリード木管楽器を対象とし、コンピュータによる数値実験を通じてその発音機構を理論的に解明する事を目的とする。楽器制作者や演奏家の職人芸的な技に理論的根拠を与えることができれば、それは新たな楽器や演奏技術の開発につながるものと期待される。

近年の管楽器研究では、まず Backus の著明な研究 [4],[5] があげられる。Backus は人工吹鳴実験を行ない木管楽器における様々な定数や数式を導いた。Schumacher [11] はそれまでの音響学や実験の結果などを総合して、クラリネットの発振を記述する連立微分方程式を作り、演奏波形およびマルチフォニック音についてシミュレーションを行なった。また、McIntyre, Schumacher, Woodhouse [7] は、簡単な写像関数を用いて管楽器や弦楽器のモデリングを行ない発音機構の説明を試みた。しかしこれらも含めて従来の木管楽器の科学研究は演奏で用いられる音の再現が中心で、時間領域におけるダイナミックな立場からの研究はほとんどなされなかった。これは技術的な困難さだけでなく研究者自身の楽器に対する見方にも原因があり、例えば実験で演奏音以外が出た場合にその結果を’実験の失敗’として切捨てたり、理論においても演奏音について説明ができればその楽器は完全に記述できる、といった’演奏音中心’の固定観念があったようである。ところが井戸川らは演奏音にこだわらず初心者が誤って出す音等も実験結果として考慮しながらシングルリードおよびダブルリードを持つ木管楽器の人工吹鳴実験を行なった ([17],[16],[18],[12],[3],[13],[25],[26],[19] 等)。その結果、音孔をすべて押えた状態でも吹鳴圧の変化によって音が様々に変化し、この音と音との遷移の仕方(遷移構造)はヒステリシス(同じ吹鳴圧であっても上昇時と下降時で発生する音が違う)を持つが分かった。またマウスピースのくわえ方や人工唇の硬さ等によって遷移構造自体が様々に変化することも発見された。これらの遷移構造の中には通常の演奏で用いられない不快な音も多く、場合によっては演奏音が含まれない場合さえある。この実験結果から木管楽器は従来考えられてきた以上に複雑でダイナミックな性質を持つ非線形システムであることが明らかになった。しかし、多数現れる演奏に用いられない音は本来不必要なのか？それとも音色や応答を良くする為には必要不可欠なのか？この遷移構造をつくり出すメカニズムは一体何か？等の多くの疑問をも浮かび上がらせた。これらの疑問に答えられる理論は未だ存在しないのが現状である。

本研究はこの実験結果の理論的解明を目的とし、その第一歩として既存のモデルを利用してシミュレーションを行ない、井戸川らの実験結果をどこまで再現できるか調べた。既存のモデルによって再現できる部分とできない部分を明らかにしその理由を調べる事によって、木管楽器の発音機構では何が重要でどうすればより簡単かつ明瞭にモデル化できるかが理解でき、逆にそこから実験では技術的に見出し得ない木管楽器の隠れた性質を導けると考えられる。本研究では木管楽器をマウスピースと管体に分けてモデル化し、マウスピースでリード振動や空気流入による非線形性を考慮し、管体は線形応答システムであると仮定する。そしてマウスピース(リードも含む)のモデルには、Schumacher の示した微分方程式系 [11](以下 Schumacher モデルとする)と McIntyre, Schumacher, Woodhouse による写像関数 [7](以下 MSW モデルとする)を用い、管体のモデルには反射関数を用いる。本研究の特徴は、マウスピースの非線形性を弱く設定した点と、管体(反射関数)において2重の反射(マウスピース部分と管端部分)のみを考慮した点にある。以下簡単にその理由を述べる。

実験にはクラリネットやサクソ、バスーン等多数の木管楽器が使われており、後述するようにバスーンなどのダブルリードを持つものは非常に複雑な遷移構造を持つ。しかし注目すべきこと

に、クラリネットのマウスピースに円筒管をついだ単純な形状の疑似的な楽器でも、比較的簡単な遷移構造を持つことがわかっている。またクラリネットや疑似楽器において発生する音は大きく基本波(矩形波)と高調波に分けられ、その解析結果から基本波は管端での反射に、高調波はマウスピースでの反射に影響されている可能性が高い([19])。このことから木管楽器の最も基本的な性質にマウスピースでの反射が大きな比重を占めている事が予想される。しかし従来の研究では、管体の反射は実際の管体形状から計算するか1つのガウス関数によって管端での反射のみを考慮するかのどちらかであり、一部([23])を除いてマウスピースでの反射は無視されていた。そこで本研究では疑似楽器を対象とし、管端とマウスピース部分の2つの反射のみを考え、解析を容易にするためそれぞれの反射は管体形状から計算するのではなくガウス関数もしくはデルタ関数を用いた。またマウスピースでの非線形性について、小島[22][25][24]は強非線形性を持つ Schumacher モデルが周期倍分岐を起こす事を示している。しかし実験結果を見ると周期倍分岐といった強非線形性の持つ性質ははっきり現れていない。そこで本研究ではモデルの非線形性は押えてシミュレーションを行なった。本研究では、この弱非線形性+2重反射によって実験と同様の遷移構造を発生できる事を示す。

一般に木管楽器はフィードバックに多重時間遅れを持つシステム(遅延フィードバック系)として捉えることができる。しかし遅延フィードバック系についての研究は、池田ら([27],[8])によってなされているがまだまだ不明な点が多い。遅延フィードバック系は現在と過去の状態によって未来の振舞が決定されるため、従来の力学系と異なる性質を持つと考えられる。木管楽器の研究を通じて、遅延フィードバック系の一般的性質を調べることが、本研究のもう1つの目的である。

本論文の構成を簡単に説明する。まず第2章において、木管楽器の概要(種類やモデル化の基礎部分等)とMSWモデルやSchumacherモデルの簡単な説明を行なう。第3章では井戸川らによって行なわれた木管楽器の人工吹鳴実験とその結果(特にクラリネットとクラリネットのマウスピースに円筒管をつないだ疑似楽器の振舞)について説明する。そして第4章では、本研究での反射関数(管体の性質を表す)の形式及びMSWモデルとSchumacherモデルの取扱方(パラメータや独自の単純化)について解説する。第5章においてシミュレーションの結果を示す。MSWモデルでは、波形の基本的なパターンや吹鳴圧のステップ関数的入力に対する応答を調べ、クラリネットやクラリネットマウスピースに円筒管をつないだ疑似楽器の基本的性質を再現する事ができた。またSchumacherモデルのシミュレーションでは、実験と同様に吹鳴圧を断熱的に変化させる事によって疑似楽器の実験結果と類似の遷移構造が現れ、得られた波形も疑似楽器の波形の特徴をよく捉えている事が分かった。最終の第6章では結論にあてる。

2 木管楽器の概要とシングルリード木管楽器のモデル化

2.1 木管楽器の概要と基礎的理論

2.1.1 木管楽器とは

管楽器とは、ある機構からつくり出される空気流によって管体内に共鳴をおこし発音する楽器の総称であり、発音機構の違いによって金管楽器と木管楽器に分類される [15]。金管楽器 (トランペット等) は人間の唇がリード (振動子) の役割をしており (リップリードと呼ばれる)、唇を調節することによって必要な共鳴振動数を励起させる。それに対して木管楽器は、振動板や空気流をリードとして用いており、その仕組みによって次のように3種類に分類できる。(図 1)

- シングルリード 楽器: 1 枚のリードを持つもの (クラリネット, サックス等)
- ダブルリード 楽器: 2 枚のリードを持つもの (バスーン, オーボエ等)
- エアリード 楽器: 口から流れ込む空気流がリードの役目を果たすもの (フルート, リコーダー等)



シングルリード 楽器 (クラリネット)



ダブルリード 楽器 (オーボエ)



エアリード 楽器 (フルート)

(文献 [9] より)

図 1: 木管楽器の例

また木管楽器は、これら3種類とも次の2つの部分に分ける事ができる。

1. 口から流入する空気流及び2からの反射波によって圧力波をつくり出し、2に入射する部分。
2. 1からの入射圧力波を反射して、1に送り返す部分。

本研究では、1をマウスピース、2を管体もしくは共鳴気柱と呼ぶ事にする。シングルリード 楽器ではマウスピースそのもの及びリードがその役割を果たしているが、ダブルリード 楽器ではリードが、エアリード 楽器では口からの空気流及び歌口周辺部がマウスピースの役割を果たしていると考えられる。リードはマウスピースの性質の主要な部分を占める。その固有振動数は演奏音と比べてかなり高いため共振は起こりにくく、所望の音の振動数は共鳴気柱の音孔を押えることによって決まり、これは実質的に管体の長さを変更する事に相当する。唇や舌は、リードの振動や流

入する空気流の制御に用いられ、発振音の振動数に直接は関与しない。すなわち実際の演奏では、管体が発振する音の振動数を決定し、マウスピースが音を励起させ持続させる役割を担っている。

これらを総合すると、木管楽器のモデル化では、マウスピース(リードを含む)と共鳴気柱を別々にした方が考えやすい事は明らかであり、これを図示すると図2のようになる。このモデル化は、マウスピース、共鳴気柱それぞれのモデル化について従来の音響学の知識を流用でき、楽器の持つ非線形性をマウスピースのモデルで考慮し管体は線形であると仮定する事で力学的にとらえやすくなる等の多くの利点がある。以下の文章では、断りのない限りシングルリード木管楽器(特にクラリネット)について述べる。

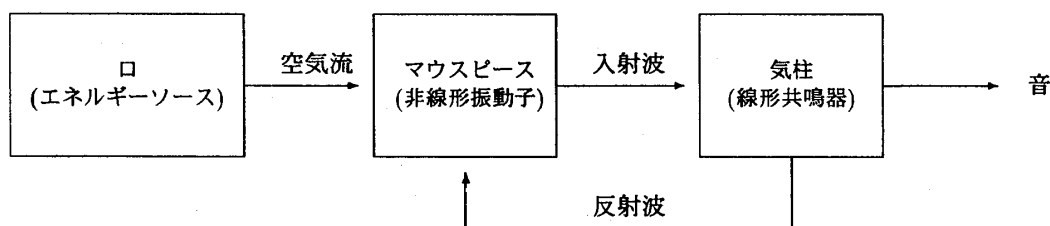


図 2: 木管楽器の基本モデル

シングルリード木管楽器の性質を表すために必要な変数は、リードの変位 y 及び開口 x , 口からマウスピースに流れ込む体積流量 U , 口内圧力(吹鳴圧力) P , マウスピース内圧力 p , 入射圧力波 p_o , 反射圧力波 p_i である(図3)。ただし本論文での圧力はすべて大気圧との差をとっている。

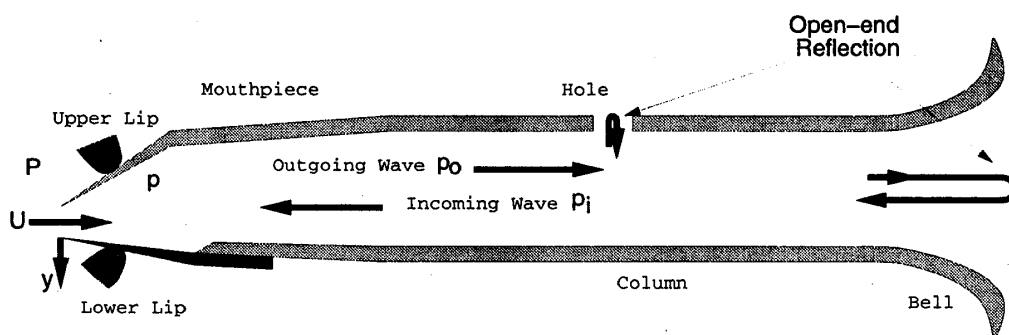


図 3: クラリネットの概念図

これらの変数の基本的な関係をまとめると次のようになる。

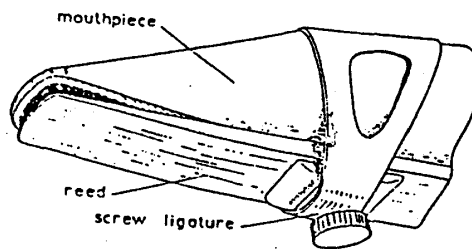
1. リード (y, x) は、吹鳴圧力 P とマウスピース内圧力 p の差によって振動する。すなわち吹鳴圧力 P がマウスピース内圧力 p に比べてある値より大きいとリードは閉まり、小さいとリードは開く。
2. 流入流量 U は、圧力差 $P - p$ と開口 x によって決まる。
3. マウスピースから管体に入射された圧力波 (Outgoing-Wave) p_o は、音孔やベルで反射され反射圧力波 (Incoming-Wave) p_i となってマウスピースに戻ってくる。

4. マウスピース内圧力 p は、入射圧力波 p_o と反射圧力波 p_i の和である。
5. マウスピースは反射圧力波を受け取ってそれに流量 U によって発生する圧力を加え、再び入射圧力波として管体へ送り出す。
6. リードの振動と管体における反射の時間遅れが同期して発振が持続する。

1,2,4,5 がマウスピースの振舞を、3 が管体の振舞を表し、6 はこの2つの振舞がうまく調和しないと発振が起こらない事を表す。本研究において、非線形振動子であるマウスピースは MSW モデル (写像関数) 及び Schumacher モデル (連立微分方程式系) によって記述し、線形共鳴器である管体は反射関数によって記述するが、まずマウスピースと反射関数の基本的な理論を以下で説明する。

2.1.2 マウスピース

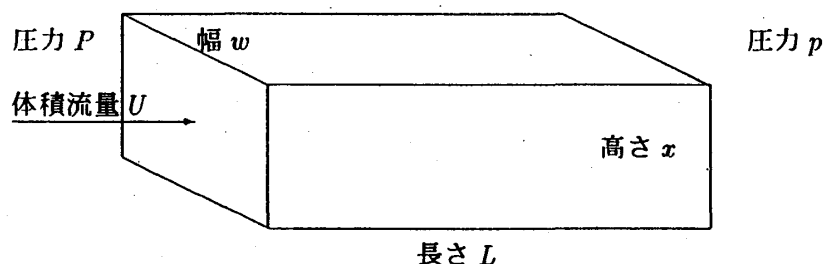
クラリネットのマウスピースは図4のようにになっている。その下部には振動片であるリードが取り付けられ、マウスピース上面とリード下面を唇で挟み込むようにしてくわえられる。



(文献 [1] より)

図 4: クラリネットのマウスピース

マウスピース部分のモデル化は文献 [5],[9] に詳しく、以下簡単に解説する。まず流入する空気流が定常流である場合の性質を知るために、マウスピースを幅 w 高さ x 長さ L の角柱と考え流速を u とおいてベルヌーイの定理を適用すると、



$$P = p + \rho \frac{1}{2} u^2, \quad u = \frac{U}{wx}.$$

上式から u を消去すると、

$$U = \gamma_1 |x| (P - p)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_1 = w \sqrt{\frac{2}{\rho}}$$

となる。

しかし、実際のマウスピースは角柱ではないため、次のように一般化する。

$$U = \gamma_1 |x|^\alpha (P - p)^\beta \quad (1)$$

指数 α 及び β については、Backus の実験から $\alpha \approx \frac{4}{3}$ $\beta \approx \frac{2}{3}$ が得られている [5]。

次に空気流が非定常流である場合の性質を調べるために、ニュートンの第2法則を用いる。

$$f = m \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots \quad f: \text{マウスピースにかかる力}, m: \text{マウスピース内の空気質量}.$$

上式に次の関係式

$$m = \rho L w x, \quad u = \frac{U}{w x}, \quad f = (P - p) w x$$

を代入して整理すると、

$$P - p = \frac{\gamma_2 \partial U}{x \partial t} \quad \dots \quad \gamma_2 = \frac{\rho L}{w} \quad (2)$$

となる。 γ_2 は空気の実効質量と言う。式 (1), (2) からマウスピースに流れ込む体積流量の運動方程式が導かれる。

$$P - p = \gamma_1^{-\frac{1}{\beta}} |x|^{-\frac{\alpha}{\beta}} U^{\frac{1}{\beta}} + \frac{\gamma_2 \partial U}{x \partial t} \quad (3)$$

音響学の分野ではよく電気回路とのアナロジーを用いるが、式 (3) も電気回路理論と比較すると理解しやすい。圧力 P, p を電圧 V, v 、流量 U を電流 i とおくと式 (3) は、次の RL 回路の方程式

$$V - v = Ri + L \frac{di}{dt}$$

に対応する。式 (3) の $\frac{\gamma_2}{x}$ はインダクタンス L 、 $\gamma_1^{-\frac{1}{\beta}} |x|^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ は抵抗 R と比較できる。

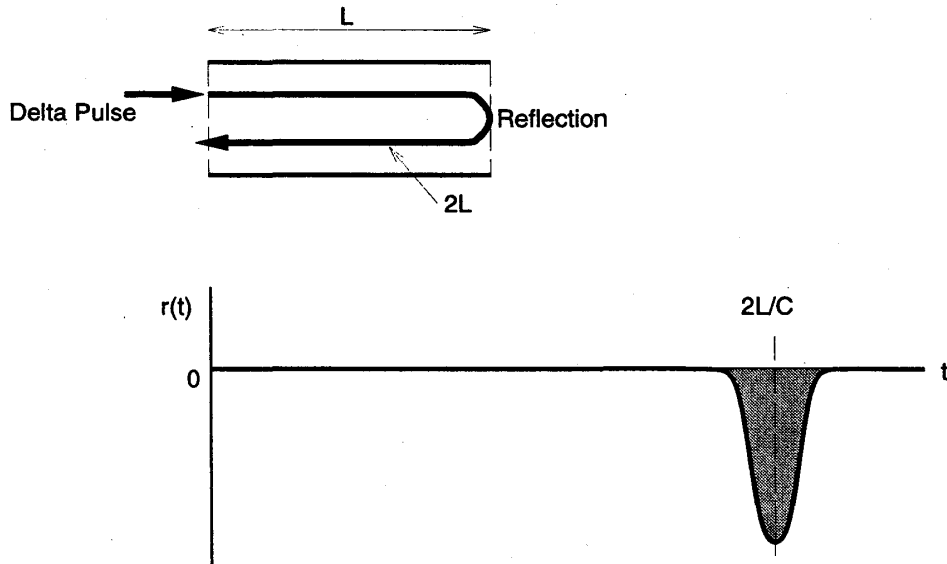
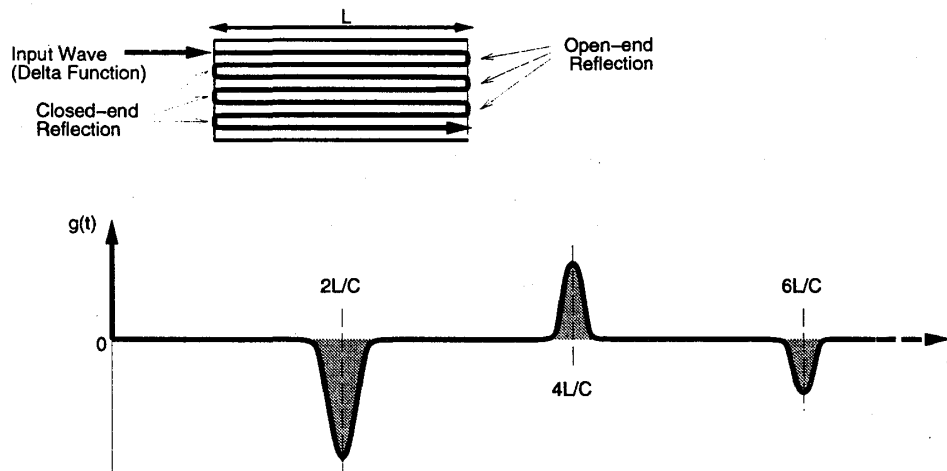
2.1.3 共鳴気柱 (管体)

管体の役割は、マウスピースからの入射圧力波を受け取って反射波として送り返すことであり、反射は音孔や管端で行なわれる。また、入射波が音孔や管端で反射されマウスピースに戻って来るまでの時間が、多重の時間遅れとなる。発音機構の立場から考えれば、管体の役割はこのようなマウスピースとの相互作用にあり、我々が耳にする演奏音は音孔や管端から洩れ出る反射の余物と言えなくもない。

楽器の発する音の周波数は数十 Hz から数千 Hz であり空気振動の非線形性は無視でき、木管楽器の管体は線形な共鳴器であると仮定できる。したがってマウスピースから管体に送り出されたデルタ関数的な入射波が、いつでもどれくらいの大きさを反射してくるかがわかれば、その重ね合わせによって管体の振舞を記述できると考えられる。

この情報を記述するために本研究では反射関数を用いる。反射関数とは管体にデルタ関数的圧力波を入射した場合の反射波の時間変化を入射位置で観測したものであり、入射圧力波 p_o 、反射圧力波 p_i 、反射関数 $r(t)$ との関係は、 $p_o(t) = \delta(t)$ の場合 $p_i(t) = r(t)$ となる。例えば円筒管の反射関数は図5のようになる。

線形システムの応答特性を表すものとしては一般にインパルス応答が用いられる (図6)。しかし、インパルス応答は圧力波を入射した後その入射口を完全に閉じてしまうため、管端で開口端反射して戻ってきた波は入射口で閉端反射をし、それが再び管端で開口端反射して、この振舞が減


 図 5: 円筒管の場合の反射関数 (L : 管体長, c : 音速)

 図 6: 円筒管の場合のインパルス応答 (L : 管体長, c : 音速)

衰するまで続く。(図 6 の 2 回目以降の反射。) 反射関数もインパルス応答も計算式には積分の形で入ってくるため、減衰が遅いというインパルス応答の性質は計算効率の上から都合が悪い。また、図 6 のような簡単な管体形状ではない場合、インパルス応答は反射関数以上に複雑な形となり、本質が掴みにくくなる。さらに、2 節のように本研究ではマウスピースと管体を別々にモデル化しているため、インパルス応答の入射口での閉端反射 (これは本来マウスピースの仕事である) が管体のモデル中に入ってくるのはモデル化の上からも好ましくない。したがって本研究ではインパルス応答ではなく反射関数を用いて管体を記述する。反射関数の理論については [11], [7] に詳しい。

入射圧力波 p_o , 反射圧力波 p_i , マウスピース内の圧力 p 及び反射関数 $r(t)$ を用いて次式が得られる。

$$p(t) = p_o(t) + p_i(t) \quad (4)$$

$$p_i(t) = \int_0^\infty r(\dot{t}) p_o(t - \dot{t}) d\dot{t} \quad (5)$$

ここで、マウスピースに流れ込む体積流量 U を

$$Z_0 U(t) = p_o(t) - p_i(t) \quad (6)$$

と仮定する。すなわち発振が励起される段階 ($p_o(t)$ の振幅が $p_i(t)$ の振幅より大きい) では多くの空気が流れ込み、定常発振時には反射によって減衰した分だけの流量が流れ込む。また $U = 0$ の場合 $p_o(t) = p_i(t)$ となり、これはマウスピースでの閉端反射を意味する。 Z_0 は管の特性インピーダンスを表し、

$$Z_0 = \frac{\rho c}{S} \quad \dots \rho: \text{空気密度}, c: \text{音速}, S: \text{管の断面積}$$

で与えられる。

式(4),(6)から、

$$2p_o = p + Z_0 U \quad (7)$$

$$2p_i = p - Z_0 U \quad (8)$$

が得られ、式(7)と式(8)及び式(5)から、 p_o と p_i を消去して次式が導かれる。

$$\begin{aligned} p &= Z_0 U + P_{inc} \\ P_{inc} &= \int_0^\infty r(\dot{t}) [p(t - \dot{t}) + Z_0 U(t - \dot{t})] d\dot{t} \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)は、マウスピースの状態変数 p, U と反射関数の関係を表し、この式によって時間領域でのシミュレーションが可能になる。

2.2 シングルリード木管楽器のモデル化

2.2.1 Schumacher モデル

Schumacher は参考文献 [11] において、それまでの音響学の成果を集大成しクラリネットの発振を記述する連立方程式を提示した (式 10,...,16, 図 7)。

$$\ddot{y} + g_r \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{p - P}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\rho}{w} \frac{U^2}{x \tan \theta \mu S_r} \quad (10)$$

$$M_e \dot{U}_f = P - p - \frac{|U_f|^{3/2} \text{sgn}(U_f)}{A^{3/2} x^2} \quad (11)$$

$$M_e(x) = \frac{\rho}{2\pi w} \sqrt{\frac{w}{x}} (1 + 2 \ln(\frac{2w}{x})) \quad (12)$$

$$U = U_f - S_r \dot{y} \quad (13)$$

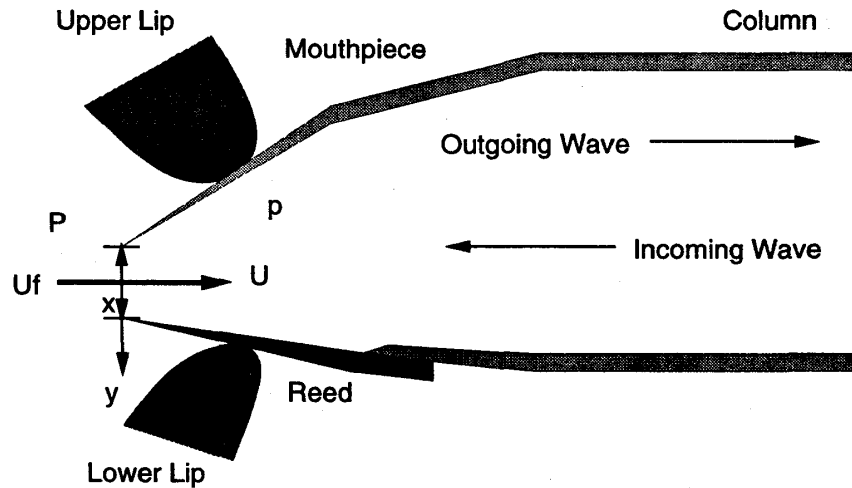
$$p = Z_0 U + P_{inc} \quad (14)$$

$$P_{inc} = \int_0^\infty r(\dot{t}) [p(t - \dot{t}) + Z_0 U(t - \dot{t})] d\dot{t} \quad (15)$$

$$x = y + x_0 \quad (16)$$

ただし $x = 0, y = -x_0$ の場合 (リードが閉じた場合) は、 $U_f = U = 0, \dot{y} = 0$ である。

式(10)はリードの振動を記述している。リードは調和振動子として近似されマウスピース内音圧 p と吹鳴圧 P の差によって駆動される。なお y はリードが開く方向を正にとる。右辺第2項



y	リードの変位	g_r	リードの減衰定数
x	リードの開口幅	ω_0	リードの共振周波数
x_0	リードの自然開口幅	μ	リードの単位面積あたりの質量
p	マウスピース内音圧	w	リードの幅
P	吹鳴圧力	S_r	リードの実効面積
U_f	口からの流入体積流量	ρ	空気密度
U	マウスピースへの流入体積流量	A	定数 (実験値)
M_e	空気流の実効質量	Z_0	管の特性インピーダンス

図 7: Schumacher モデルの概略図と各変数, 定数

は、Worman[14] が導いたリード上を流れる空気によるベルヌーイ力であり、定数 θ はマウスピースの形状から決定されクラリネットの場合は約 30° 度である。しかしこの項の影響はシングルリード楽器では小さいというのが通説となっており [11]、本論文では簡単化のため無視する。式 (11) は、口からマウスピースに流れ込む空気の運動方程式を表し、式 (3) を実験結果から修正したものである。この式は Backus[5] と Nederveen[1] に依るところが大きい。流入空気の実効質量 $M_e(x)$ を計算する式 (12) は Sivian[6] による長方形スリットを通る空気の実効質量の式を、実験に合うように修正して用いている。この連立方程式内で口から流入する体積流量 U_f とマウスピースに流入する体積流量 U が現れているが、これはリード振動によって起こる空気流を考慮しているため、式 (13) にあるように U は U_f とリードの振動速度にリードの実効面積を掛けた $-S_r \dot{y}$ との和によって表現される (y は開く方向を正にとっているため符号が負になっている)。反射関数と流入流量、音圧との関係式は式 (9) と全く同様である。

この Schumacher 方程式はリードを調和振動子と近似する等いくつかの問題点もあるが、これまでの演奏波形の研究 ([11]) からおおむねクラリネットの特徴をうまくとらえていると考えられる。また時間領域でのシミュレーションにそのまま用いる事ができるため、本研究のようにダイナミックな性質の解明を目的とした研究に向いていると思われる。

2.2.2 MSW モデル

McIntyer, Schumacher, Woodhouse は、写像関数と反射関数を用いてクラリネット、弦楽器、エアリード楽器のシミュレーションを行なった [7]。この中で反射関数はガウス関数によって近似され

ている。McIntyre らがクラリネットモデルのシミュレーションに用いた写像関数は式 (17) であり、シングルリード楽器のマウスピースに関する最も簡単なモデルであると考えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } p > P_c \text{ then } U = C(p - P_c)(P - p) \\ \text{if } p \leq P_c \text{ then } U = 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

上式は式 (1) を基礎とする。もし流入する空気の実効質量を 0 とおく事ができれば (すなわち必要な空気は少しの遅滞もなく流入し、空気流は常に定常流とおけるならば)、式 (2) は不必要となり式 (3) は式 (1) と等しくなる。さらにそこでリードの変位 y は音圧と吹鳴圧との差に比例すると仮定すると、

$$y = \gamma_4(p - P) \quad \dots \gamma_4: \text{正の定数}$$

であるから リードが閉まった時 ($y = -x_0, x = 0$) の音圧を P_c とおいて

$$x = y + x_0 = \gamma_4(p - P) - \gamma_4(P_c - P) = \gamma_4(p - P_c)$$

が得られる。これを 1 式に代入すると、

$$U = C(p - P_c)^\alpha (P - p)^\beta \quad \dots C = \gamma_1 \gamma_4^\alpha$$

となるが、更に計算の簡単化のために α 及び β を 1 とおく事で式 (17) が導かれる。

式 (17) をグラフ化したものが図 8 である。 p が P_c より小さい場合リードは閉じており $P > P_c$

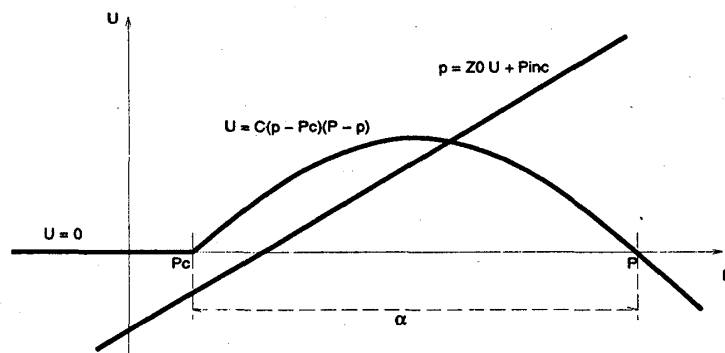


図 8: MSW モデルでの $p - U$ 曲線

となった時点でリードが開き始め空気が流れ込む。さらに p が大きくなるとリードの開口が大きくなり流量も増え、ある値を過ぎると今度は口内とマウスピースの圧力差 $P - p$ が小さくなり流量は減少する。また $p > P$ の領域では空気が逆流する。

この図 8 とクラリネットや疑似楽器の $p - U$ 曲線 (図 11, 12) を比較すると MSW モデルが非常に単純な形をしながらも実際の楽器の基本波 (演奏音) の性質をうまくとらえていると言える。しかしカオス波や準周期波の $p - U$ 曲線をどこまで再現できるか定かではなく、特にリードの構造を無視しているため、遷移構造といった実際のダイナミックな実験結果と直接比較できるシミュレーション結果は導出されない可能性がある。したがって MSW モデルは、木管楽器の発音機構の基本的性質の解明に適したモデルであると考えられる。

3 井戸川グループによる木管楽器の人工吹鳴実験

3.1 概要

井戸川らはさまざまなリード付き木管楽器(クラリネット、オーボエ等)の人工吹鳴実験を行なった。実験装置の概要を図9に示す。木管楽器はシリコン製の人工唇にくわえられる事によって人工口に固定され、コンプレッサーから人工口にかかる空気圧によって発振する。この人工唇の製作にはある程度の経験が必要であり、さらに実験でうまく音を出すことにも熟練を要する。(そもそも人間が木管楽器を鳴らすこと自体が大変な事であるから、これを機械で行なう事にかなりの困難が伴うのは当然の事と言えよう。)実験では楽器の音孔はすべて閉じてあるため、吹鳴状態を特徴づけるパラメータはリードが人工口の中に突き出た部分の長さ l 、リードの自然開口幅 x_0 および吹鳴圧力 P_0 となる。本論文では l や x_0 、人工唇の状態といったマウスピースをくわえる条件を演奏条件と呼ぶ事にするが、演奏条件を固定し、吹鳴圧力をコントロールパラメータとして上昇下降させると、音孔をすべて閉じた場合に鳴る演奏音だけでなくリードミスと呼ばれる初心者が誤って鳴らす音等さまざまな音が発生する。しかもそれらの音の変化は吹鳴圧力に対してヒステリシスを持つ(同じ吹鳴圧力でも、その吹鳴圧に変化する前に発振していた音が何であるかによって発振する音が異なる場合がある)。この遷移構造は、演奏条件の少しの違いで変化し一様ではない。また極端な場合にはその遷移構造は実験に習熟した実験者本人でしか再現できない場合もある。

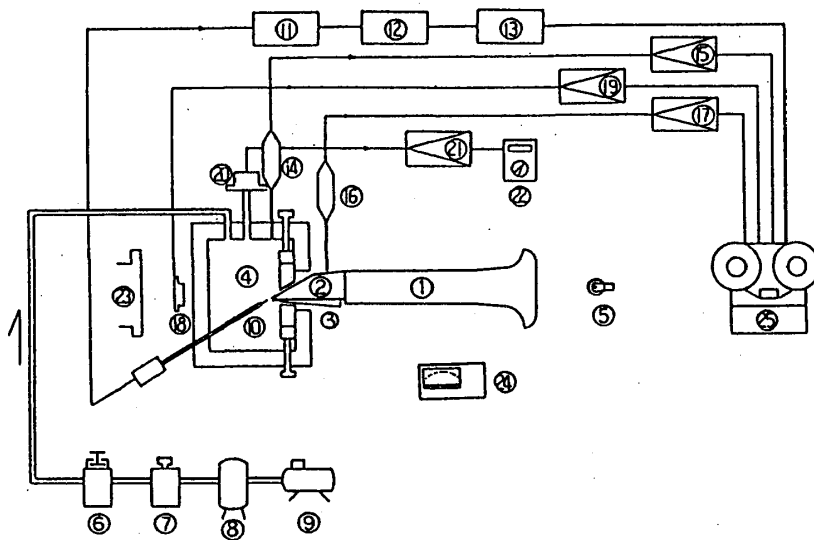
実験に用いられた木管楽器は、ダブルリード楽器がオーボエ、バスーン、シングルリード楽器がクラリネット、ソプラノサキソフォンであるが、これら以外にも円錐気柱(+バスーンのリード)、音孔の無いソプラノサキソフォン、円筒気柱(+クラリネットのマウスピース)等の実験が行なわれている。この中でも特にバスーンとオーボエは非常に複雑な遷移構造を持つ。その典型的な例を図10に示す。

これらダブルリード楽器の振舞は興味深いがいきわめて複雑で最初の研究としては難しすぎる。さらに、その複雑さゆえに系の本質を抜き出せない恐れもある。そこで本研究では、比較的遷移構造が簡単で信頼できる物理モデルがすでに存在し、また多くの実験データが得られているクラリネット及び円筒管にクラリネットのマウスピースを継いだ疑似楽器を対象とする。次節においてこの2つの実験結果を示す。

3.2 クラリネット

クラリネットの実験においても音孔はすべて閉じられているので、演奏音はクラリネットの最低音 D_3 (147Hz) である。しかし実験では、この演奏音(基本波)以外にも多くの波形が現れ、中にはカオティックな振舞を示すものもある。遷移ダイアグラムの例を図11に示す。この例では、吹鳴圧を上昇させると最初に高調波 $C_6^\#$ が現れる。そのまま上昇させると基本波である D_3 に遷移し、さらに発振が停止する直前の狭い領域で基本波の亜種 D_{3H} が現れる。また発振停止後に吹鳴圧を下げると高調波 E_6 が現れたり、高調波 $C_6^\#$ が発振している状態から吹鳴圧を下げるとカオティックな波形 X に遷移する等のヒステリシス現象が見られる。

クラリネットの遷移構造もオーボエやバスーンと同様に、演奏条件によって様々なものが現れるが、大まかに見ると吹鳴圧の上昇に伴って(高調波 → 基本波(矩形波) → 基本波の亜種)のように遷移する。高調波の振動数は基本波のそれのほぼ7倍かそれ以上であり(図11 $C_6^\#$)、3倍や5倍の高調波は現れず、高調波の発生する領域の前後で準周期波形やカオス波形が現れる事がある(図11 X)。基本波の波形は矩形波と見なす事ができ(図11 D_3)、これはクラリネットの管体形状が円筒管に近い事を示している。また基本波の亜種は、基本波が高調波によって変調された形をしている。(図11 D_{3H})



- | | |
|------------------|------------------|
| 1) クラリネット, | 14) ブローブマイクロフォン, |
| 2) マウスピース, | 15) 計測用増幅器. |
| 3) プラスチックリード, | 16) ブローブマイクロフォン, |
| 4) 吹鳴器, | 17) 計測用増幅器. |
| 5) レンズランプ, | 18) フォトダイオード, |
| 6) ブリード型圧力調整器, | 19) I-V コンバータ, |
| 7) 減圧弁, | 20) 圧力変換器, |
| 8) 空気溜, | 21) 直流増幅器, |
| 9) 空気圧縮器, | 22) デジタルテスタ, |
| 10) 熱線ブローブ, | 23) 接眼マイクロメータ, |
| 11) 簡易型熱線流速計, | 24) デジタルチューナ, |
| 12) 指数可変型リニアライザ, | 25) データレコーダ |
| 13) 直流電圧計, | |

図 9: 実験装置の概要 a. 装置 b. 人工口

3.3 円筒管

クラリネットの管体は基本的には円筒形であり、その基本波形は矩形波である。しかしクラリネットにはベルと呼ばれる円錐部分があり、さらに俵管(マウスピースと管体をつなぐ短い管)や音孔などが存在するため理想的な円筒管ではない(音孔が閉じられていても管との段差により圧力波が乱される)。したがって実験結果を解析する際に、どの要素が原因で起こった振舞なのかはつきりしなくなる。発音機構の解明、特に多数の波形が現れる遷移構造を対象とする立場から見れば、管体は遷移構造の定性的性質を崩さないかぎりにおいて、できるだけ簡単な方が望ましい。その簡単な系での解析の上で、例えばベルの影響などについての有益な議論が展開できるものと考えられる。シミュレーションにおいても、反射関数の簡略化によりパラメータを減らす事ができるためそれだけ発音機構の本質に迫る事が可能となる。また計算の高速化もはかる事ができる。井戸川らは、一般に使われている木管楽器以外に、クラリネットのマウスピースに円筒管を継いだ疑似的な楽器の実験も行っており、その円筒管には音孔もベルも存在しない。ところが注目すべき事に、この疑似楽器はクラリネットに類似したヒステリシスを伴う遷移構造を持つ。そしてクラリネットやオーボエ等と同様に、演奏条件によって多くの遷移構造を発生させる。その遷移ダイアグラムの一例を図12に示す。この例では吹鳴圧の上昇に伴い、 B_5 (高調波) $\rightarrow D^{\#}_Y$ (うなり

を伴う準周期波) $\rightarrow C_{3a}^{\#}$ (基本波) $\rightarrow C_{3b}^{\#}$ (基本波の亜種) のように遷移する。吹鳴圧の上昇速度の違いで B_5 とは別の高調波 $D_6^{\#}$ が現れる事もあり、また基本波の発生領域に重なる領域で $C_{3b}^{\#}$ とは別の基本波の亜種 $C_{3m}^{\#}$ が現れている。

クラリネットと疑似楽器の実験結果の類似点、相違点を簡単にまとめると、次のようになる。

● 類似点

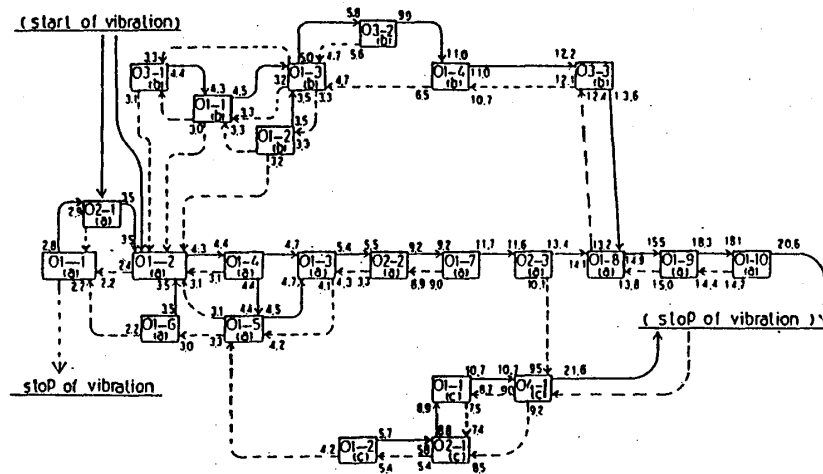
1. 基本波形は矩形である。
2. 吹鳴圧の低い領域では高調波、高い領域では基本波が現れる。
3. 振動数の異なる複数の高調波が存在する。
4. 吹鳴圧上昇時に発振が終了する前に、基本波の亜種が現れる。(図 11 D_{3H} , 図 12 $C_{3b}^{\#}$ 等)

● 相違点

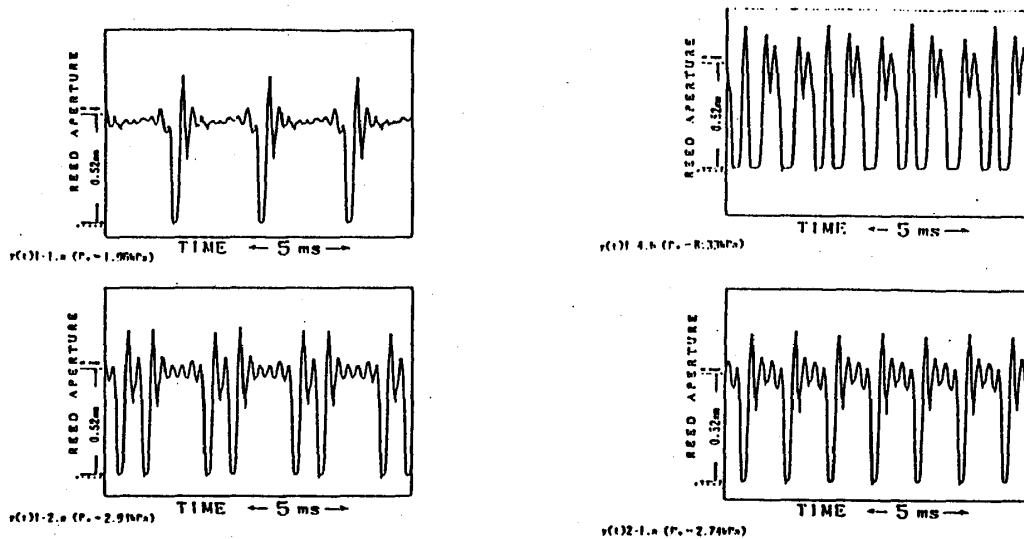
1. 疑似楽器の方にはカオティックな波形が少ない。
2. 基本波の亜種の形が異なる

クラリネットに現れる基本波 (矩形波) の亜種は、基本波の振幅が高調波の周期で変調された形になっている (D_{3H})。それに対して疑似楽器の基本波の亜種は、高調波と幅の狭い基本波が組合わさったもの ($C_{3m}^{\#}$) と、基本波の肩が落ちリードの開いている時間が短くなっているもの ($C_{3b}^{\#}$) である。

クラリネットや疑似楽器に現れる高調波がほぼ基本波の 7 倍以上の振動数を持つ事はすでに述べた。この高調波の発生要因について、岩城 [19] や小島 [22] はマウスピースでの反射をその一因に挙げている。(ここで言うマウスピースは実際のクラリネットや疑似楽器を構成するマウスピースであって本研究でモデル化に関して用いているマウスピースではない。) そこで本研究では管端での反射とマウスピースでの反射を考慮した反射関数を用いてシミュレーションを行なった。また解析を容易にする為、それぞれの反射はガウス関数もしくはデルタ関数で表現している。



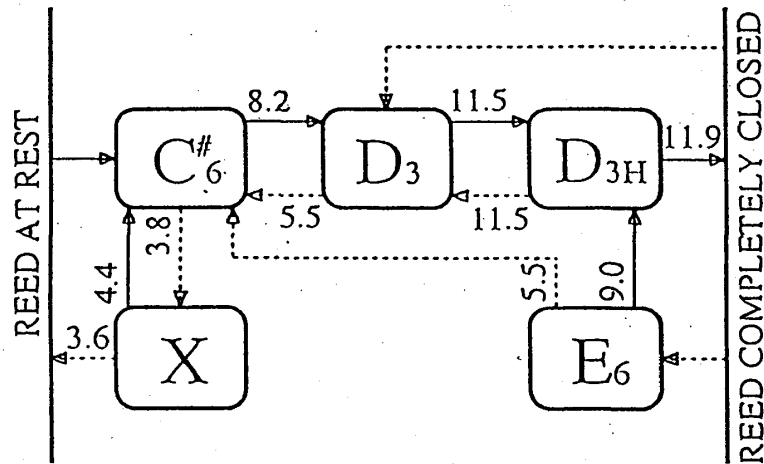
遷移 Diagram



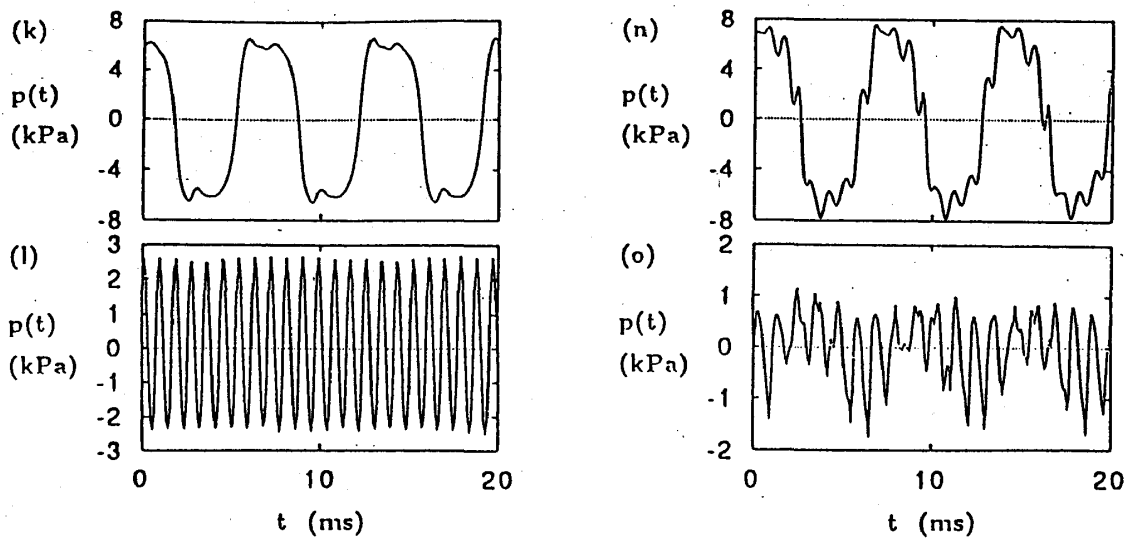
リードの振動波形

文献 [19] より

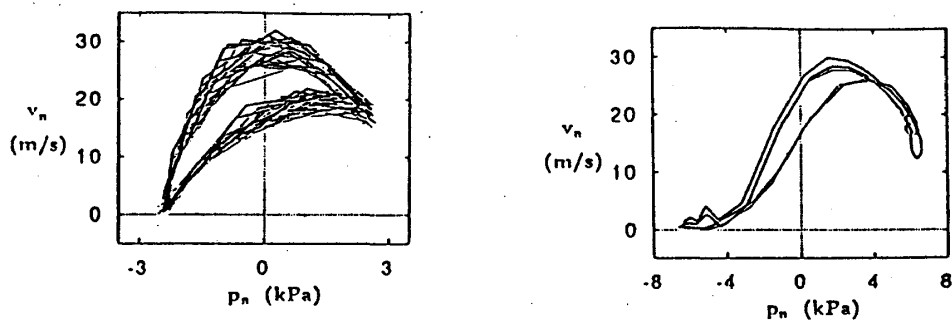
Figure 3.2: オーボエの遷移 Diagram および波形の例 ($l = 9.0\text{mm}$, $x_0 = 0.52\text{mm}$)



遷移 Diagram



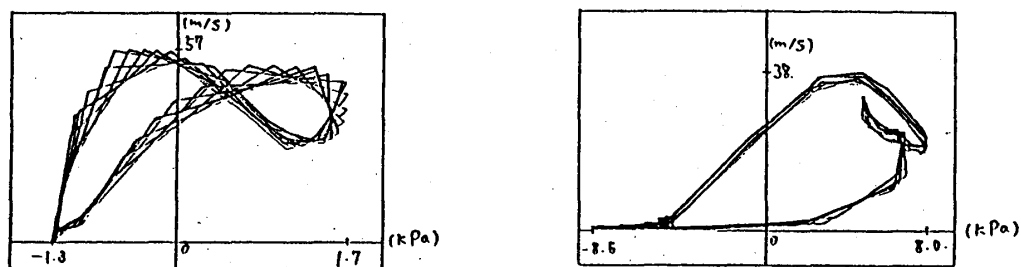
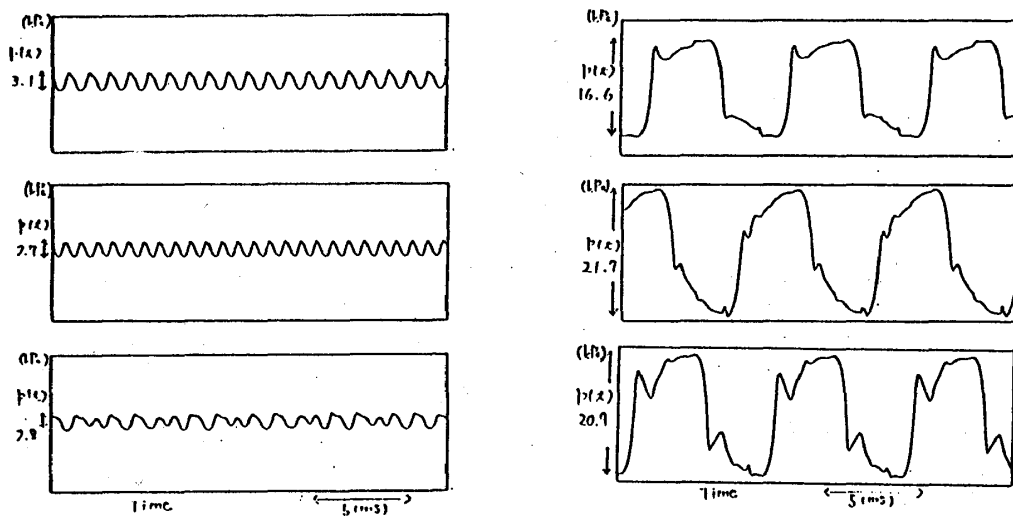
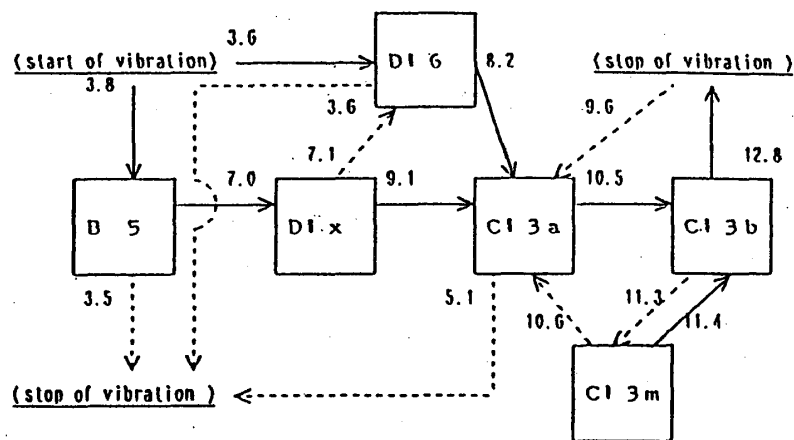
音圧波形 (左上: D_3 , 左下: $C_6^\#$, 右上: D_{3H} , 右下: X)



p-v 曲線 (左: $C_6^\#$, 右: D_3)

文献 [22] より

Figure 3.3: クラリネットの遷移 Diagram および波形の例 ($l = 7.0\text{mm}$, $x_0 = 0.71\text{mm}$)



文献 [26] より

Figure 3.4: クラリネットマウスピース+円筒管の遷移 Diagram および波形の例 ($l = 7\text{mm}$, $x_0 = 0.78\text{mm}$)

4 クラリネットのモデル化

4.1 概要

本研究では、クラリネットのモデルとして2.2節で解説した Schumacher モデルと MSW モデルを用いる。Schumacher モデルは連立微分方程式であり厳密とまではいかないまでもクラリネットの定性的な性質をかなりうまく表していると考えられている。それに対して MSW モデルは写像関数で表され、Schumacher モデルを可能な限り単純化した形をしている。したがって、MSW モデルを用いて遷移構造を含めたクラリネットの振舞をどこまで再現できるか疑問ではあるが、その単純さを活かして Schumacher モデルでは困難なシステムの基本的な性質の解析(例えば、生成可能な波形パターンやその存在領域の解析、理論的アプローチからの解析等)に適していると考えられる。本研究でのモデル化の重要なポイントは次の通りである。

1. マウスピース部分の非線形性は弱い。
2. 反射関数は2重の反射のみを考え、それぞれの反射はガウス関数もしくはデルタ関数で表現する。

マウスピースの非線形性がある程度強くすると、周期倍分岐といったカオス特有の性質が現れる([25],[24])。しかし実験に現れるクラリネットの遷移構造は、強非線形性による周期倍分岐とは異なるように見えるため、本研究では Schumacher が用いたパラメータ値をそのまま採用することで、マウスピースの非線形性を弱めに設定している。また現実のマウスピースは複雑な形状をしているためここでの反射が全く無いとは考えにくく、実験に現れる高調波がマウスピースと管体の接合部付近の反射によって発生している可能性は高い。そこで本研究では高調波と基本波を含む遷移構造が発生する原因として、マウスピースでの反射を想定した。すなわち反射関数は管端とマウスピースの2つの反射を持つと仮定し、その他の要素(音孔やベル等)は除外した。この反射関数はクラリネットよりも第3.3節で紹介したクラリネットのマウスピースに円筒管を接いだ疑似楽器に対応するものである。以下、この反射関数と本研究での Schumacher モデル及び MSW モデルについて解説する。

4.2 反射関数

本研究で用いた反射関数は、図13のような形をしている。この2つの反射は、ガウス関数もしくはデルタ関数で表すが、Schumacher モデルでは微分方程式を解くのにルンゲクッタ法を用いているため、デルタ関数では解が発散しシミュレーションできない。そこで、Schumacher モデルではガウス関数を、MSW モデルではガウス関数とデルタ関数を用いている。

マウスピースでの反射を添字1で、管端での反射を添字2で区別すると、本研究で用いた反射関数は

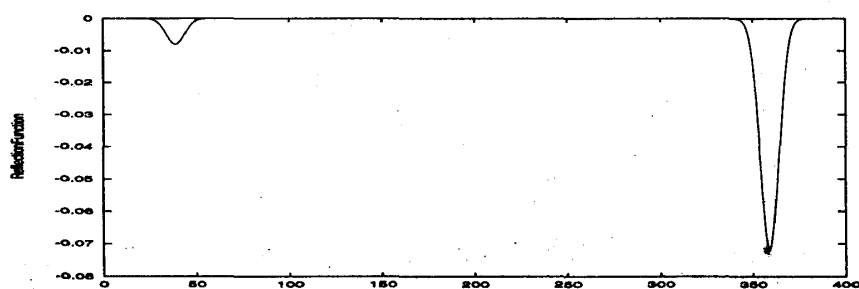
$$r(t) = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(t-t_{r1})^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(t-t_{r2})^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad \dots \text{Schumacherモデル} \quad (18)$$

$$r_i = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(i-t_{r1})^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(i-t_{r2})^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad \dots \text{MSWモデル(ガウス関数)} \quad (19)$$

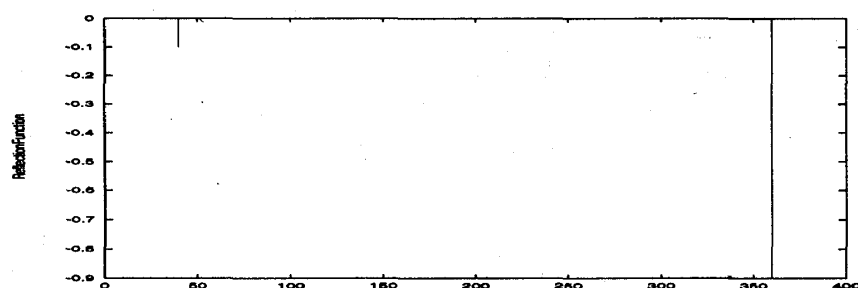
$$r_i = a_1 \delta_{i-t_{r1}} + a_2 \delta_{i-t_{r2}} \quad \dots \text{MSWモデル(デルタ関数)} \quad (20)$$

と表される。(ただし、 a_1, a_2 : 反射面積(大きさ) σ_1, σ_2 : 分散 t_{r1}, t_{r2} : 時間遅れ)

反射関数をデルタ関数で表現する利点については第4.4節で説明する。



ガウス型反射関数 ($a_1 = -0.1$, $a_2 = -0.9$, $t_{r1} = 40$, $t_{r2} = 360$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$)



デルタ型反射関数 ($a_1 = -0.1$, $a_2 = -0.9$, $t_{r1} = 40$, $t_{r2} = 360$)

図 13: 本研究で用いた 2 つの反射を持つ反射関数の例 (MSW モデル)

4.3 Schumacher モデル

本研究では基本的に Schumacher モデルの変更は行なっておらず各パラメータも Schumacher が用いた値をそのまま引用している。ただし式 (10) の右辺第 2 項は前述の通り無視している。またパラメータの値はそれぞれ次のように設定し、4 次のルンゲクッタ法を用いてシミュレーションを行なった。

g_r	リードの減衰定数	3000 s^{-1}
ω_0	リードの共振周波数	23250 s^{-1}
μ	リードの単位面積あたりの質量	0.0231 kg/m^2
w	リードの幅	14 mm
S_r	リードの実効面積	$1.46\text{E-}4 \text{ m}^2$
ρ	空気密度	1.2 kg/m^3
A	定数 (実験値)	0.0797 mksunits
Z_0	管の特性インピーダンス	$2.31\text{E}6 \text{ kg/m}^4\text{s}$

表 1: Schumacher モデルでのパラメータの値

4.4 MSW モデルとその低次元化

本研究では 2.2.2 節で紹介した MSW モデルを若干修正して用いる。まず定数 α を導入し $\alpha \equiv P - P_c$ とおき、式 (17) を

$$\left. \begin{array}{ll} \text{if } p > P_c \text{ then} & U = C(p - P + \alpha)(P - p) \\ \text{if } p \leq P_c \text{ then} & U = 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

と変形する。さらに MSW モデルの各変数をスケーリングして無次元化し、その際 $Z_0 U$ を新たに U と定義しなおす。反射関数は線形であるため、スケーリングしてもその振舞は変わらない。この操作によって式 (21) の性質は、 α と 2 次関数の最大値との比によって決まる。本研究では $\alpha = 1$, $C = 0.5$ としているが、この場合の 2 次関数の最大値は $1/8$ となり、この数字は井戸川らの実験における音圧と流量の関係から推定した。したがってこの写像関数の非線形性は弱く、周期倍分岐のような強非線形性による振舞はしない。式 (21), (9) を写像回数 i によって離散化すると、式 (9) は

$$\begin{aligned} p_i &= U_i + P_{inc,i} \\ P_{inc,i} &= \sum_{t=1}^{\infty} r_t(p_{i-t} + U_{i-t}) \end{aligned} \quad (22)$$

と修正される。式 (21) は p についての 2 次関数であるため、式 (21) と式 (22) を P_{inc} について解く事ができ 次のように p と U をそれぞれ P_{inc} の関数として表せる。

$$\begin{aligned} \text{if } P_{inc,i} > P_c \text{ then} \\ p_i &= \frac{-(\alpha - 2P + a) + \sqrt{\alpha^2 + 2a(\alpha - 2P) + a^2 + 4aP_{inc,i}}}{2} \\ U_i &= -P_{inc,i} + p_{i+1} \\ \text{if } P_{inc,i} \leq P_c \text{ then} \\ p_i &= P_{inc,i}, \quad U_i = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

(ただし $a = 1/C$)

ここで $X \equiv p + U$ と定義すると式 (23) は次式のように簡略化される。

$$P_{inc,i} = \sum_{t=1}^{\infty} r_t X_{i-t} \quad (24)$$

$$X_i = f(P_{inc,i}) \quad (25)$$

ただし、

$$f(P_{inc,i}) = \begin{cases} \text{if } P_{inc,i} > P_c \text{ then} \\ \quad -P_{inc,i} - (\alpha - 2P + a) + \sqrt{\alpha^2 + 2a(\alpha - 2P) + a^2 + 4aP_{inc,i}} \\ \text{if } P_{inc,i} \leq P_c \text{ then } P_{inc,i} \end{cases}$$

式 (24), (25) はデルタ関数型の反射関数 (20) 式を用いる場合、さらに簡略化できる。最も簡単な反射関数すなわち反射が完全開口端反射で 1 回のみの場合、式 (20) はその反射時間を単位時間とすると $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $t_{r1} = 1$ となるから式 (24), (25) は

$$P_{inc,i} = -X_{i-1} = -f(P_{inc,i-1})$$

で表される1次元写像となる。この1次元写像の振舞を見るために、まず固定点を調べて見る。 P_{inc} を仮に x とおくと、上式は

$$\begin{aligned} \text{if } x_i > P_c \text{ then } x_i &= g(x_{i-1}) \\ &= x_{i-1} + (\alpha - 2P + a) - \sqrt{\alpha^2 + 2a(\alpha - 2P) + a^2 + 4ax_{i-1}} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{if } x_i \leq P_c \text{ then } x_i = -x_{i-1} \quad (27)$$

となる。固定点 x^* では $x_i = x_{i-1} = x^*$ なので

$$x^* = g(x^*)$$

を解いて、固定点 $x^* = (P^2 - \alpha P)/a$ が得られる。これは楽器で言えば音が出ずただ一定量の空気が流れ込んでいる状態を意味する。この固定点周りの安定条件は

$$\left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = g'(x^*) < 1$$

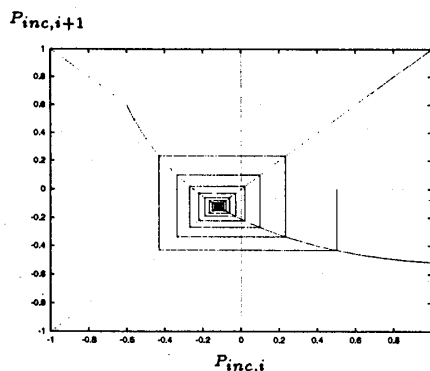
である。 $\alpha = 1, C = 0.5$ の場合、 $g'(x^*) = 1 - \frac{4}{3-2P} < 1$ を解いて、 $P < 0.5$ の区間で固定点が安定となる事が分かる。 P がそれ以上大きい場合はリードが閉じる事で安定状態をつくり出す。 $P \geq 0.5$ かつ $x^* > P_c$ の場合、 $x^* \rightarrow g(x^*) \rightarrow -g(x^*) = x^*$ を満たす解 x^* 、すなわち

$$x^* = -g(x^*) = -x^* - (\alpha - 2P + a) + \sqrt{\alpha^2 + 2a(\alpha - 2P) + a^2 + 4ax^*}$$

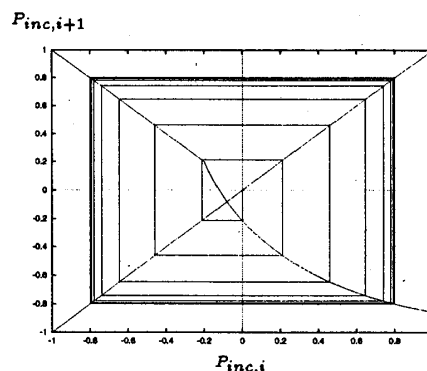
を満たす解 x^* を計算すると、 $x^* = P$ を得る。この解は $-g'(P) = 1/3 < 1$ である事から安定解であり、したがって

$$x = P, -P, P, -P, P, -P, \dots$$

が時系列として現れる。 $P < 0.5$ で現れる固定点と $P \geq 0.5$ で現れる2周期解を図示すると次のようになる。



$P_0 = 0.4$ (固定点)



$P_0 = 0.8$ (2周期解)

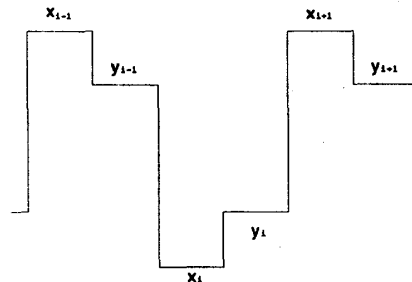
$P \geq 1$ の場合はこの2周期解 $(P, -P, P, -P, \dots)$ 以外に、 $-P_c \leq x^* \leq P_c$ がすべて2周期解となる。(ただし $x^* = 0$ は固定点である。)

次に2つの反射を持つ場合について考えてみる。2つの反射の最も簡単な例として、20式が $t_{r1} = 1, t_{r2} = 2$ となる反射関数を用いると24,25式は

$$\begin{aligned} P_{inc,i} &= a_1 X_{i-1} + a_2 X_{i-2} \\ X_i &= f(P_{inc,i}) \end{aligned}$$

ここで X_{2i} を x_i , X_{2i+1} を y_i とおくと

$$\begin{aligned} x_i &= f(a_1 y_{i-1} + a_2 x_{i-1}) \\ y_i &= f(a_1 x_i + a_2 y_{i-1}) = f(a_1 f(a_1 y_{i-1} + a_2 x_{i-1}) + a_2 y_{i-1}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (28)$$



となり x, y の 2 変数の写像で表す事ができる。同様に $t_{r2} = 3$ ならば 3 次元 $t_{r2} = 4$ ならば 4 次元の写像となる。2 つの反射を持つデルタ関数型反射関数では $t_{r1} = m, t_{r2} = n$ (m, n は正の整数) とおくと、 m, n の最大公約数 M を単位時間とすれば、 $N = n/M$ 次元の写像で表現できる。(ただし単位時間 M の定数倍の時刻以外でパラメータ (α, C, P 等) は変化してはいけない。) 反射が 3 つ以上ある場合も同様であるが、一般的に遅延フィードバックシステムは、最も大きな時間遅れの値が単位時間の N 倍であれば、

$$x_{i+1} = f(x_i) \quad \dots \quad x_i \text{ は } N \text{ 次元ベクトル}$$

と表現できる。ただし Schumacher モデルは微分方程式であるため無限次元の写像系となる。MSW モデルを低次元化するメリットは、様々な初期値の組合せをシミュレートできる事から相空間での詳しい解析が可能となり、システムの全体像を知る事ができるところにある。後述するシミュレーションでは低次元化していない MSW モデルでは初期値をすべて 0 にしており、低次元写像の場合はいくつかの初期値を組み合わせている。

5 計算機シミュレーションの結果及び考察

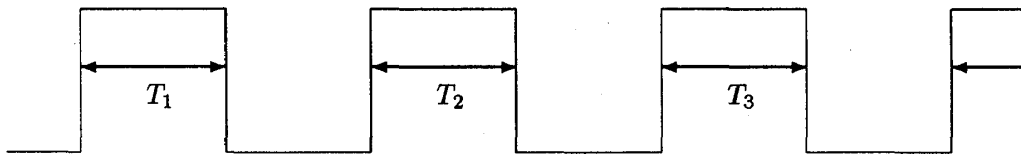
5.1 MSW モデル—吹鳴圧のステップ入力に対する応答

5.1.1 概要

MSW モデルでは前章でも触れた通りパラメータを $\alpha = 1$, $C = 0.5$ で固定している。まず反射関数を決め、それに対しステップ関数的に吹鳴圧を与えた場合にどのような波形が安定化するか調べた。ただし反射の大きさ a_1, a_2 は、それぞれ $-0.1, -0.9$ に固定している。

一般的に現れる波形を図 15, 16 に示す。基本となる波形は $t_{r2} \times 2$ の周期を持つ基本波 (矩形波) と $t_{r1} \times 2$ もしくは $(t_{r2} \times 2)/\text{奇数}$ の周期を持つ高調波だが、基本波と高調波が組み合わさったような合成波も現れる。これらの波形は他の遅延フィードバックシステムでも見られ [20], [27]、また第 3.3 節で紹介したクラリネットマウスピース+円筒管からなる疑似楽器の出力波形 (図 12) ともよく似ていることから、間接的ながら木管楽器を遅延フィードバックシステムによってモデル化する正当性を示していると考えられる。特に合成波形がクラリネットよりも疑似楽器のそれに近い事は、疑似楽器の時間遅れが 2 重の反射を基本としている事を示唆している。

このように多くの波形が現れるが、それを 1 つ 1 つ目で見て分類するのは複雑で効率が悪い。そこで本研究では次のような評価関数を設定した。

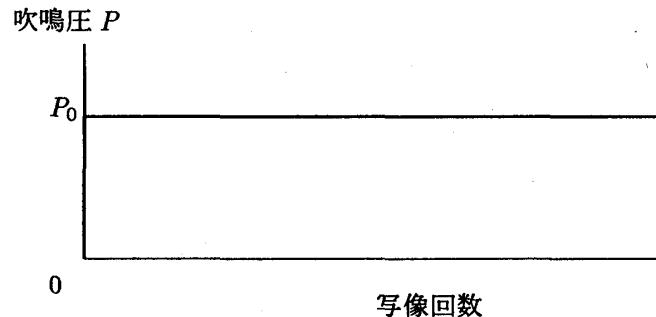


$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{N} (T_1^2 \log T_1^2 + T_2^2 \log T_2^2 + T_3^2 \log T_3^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M T_i^2 \log T_i^2 \end{aligned} \quad (29)$$

ただし T_i : 波形の正の部分の長さ M : 波形の正の部分の数 N : サンプル点総数

この関数を本研究では便宜上波形エントロピーと呼ぶ事にする。波形エントロピーは周期が短い程値が小さくなる性質を持ち、合成波と周期の比較的に長い高調波の区別も可能なため波形の分類に都合が良い。

MSW モデルのシミュレーションでは吹鳴圧を次のようなステップ関数として与えている。



$$P(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ P_0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

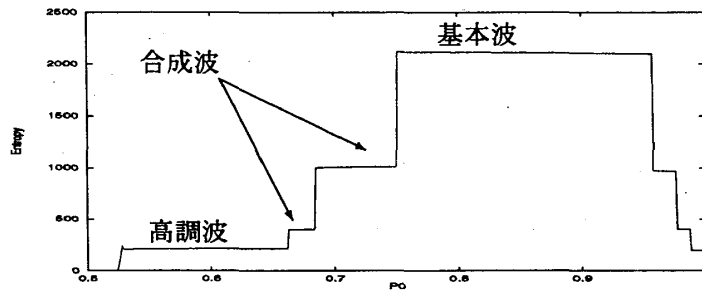


図 14: 波形エントロピーの例

P_0 は定数でありこれを用いてシミュレーションを行なうとある任意の P_0 に対して安定な波形が 1 つ見付き (固定点に落ち着く事も含む)、横軸に P_0 縦軸に波形エントロピーをとってグラフを描くと例えば図 14 のようになる。

P_0 は 0.5 から 1 の間をとっているが、これは 4.4 節で説明したように $P_0 < 0.5$ では発振しない事と、 $P_0 \geq 1$ では $P_c \geq 0$ となって 0 が新たな固定点となるため、初期値が 0 である場合永久に発振しないからである。前者は吹鳴圧が低すぎて空気流が「垂れ流し」状態になっており、後者は吹鳴圧が高すぎて吹いた瞬間にリードが閉じてしまう状態を表す。ちなみに反射が 1 つだけでかつ初期値が 0 である場合では、高調波や合成波は現れず発振するのは基本波 (矩形波) のみである。

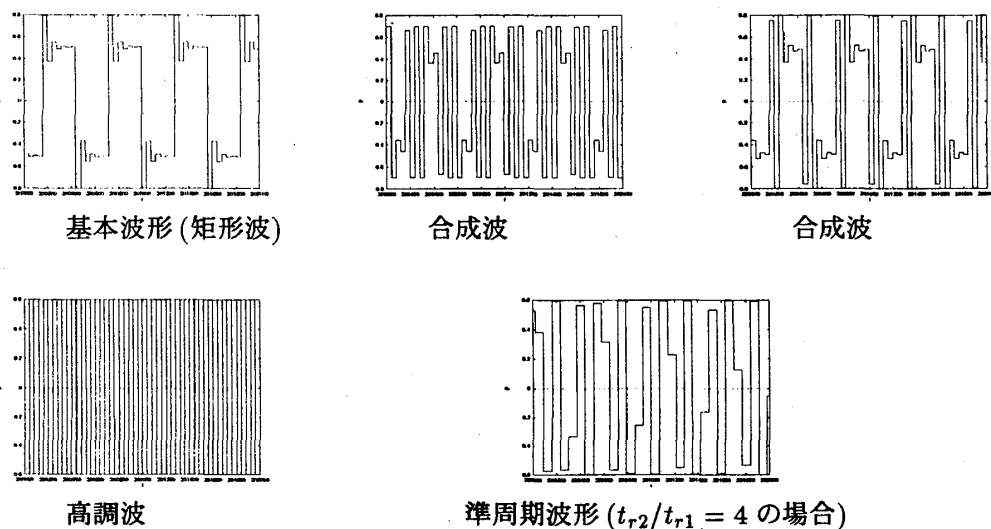


図 15: 一般的に現れる波形 (MSW モデル—デルタ関数型反射関数)

5.1.2 ガウス関数型反射関数の場合

平石は反射関数 (19) 式の 2 番目の反射 (管端での反射) を固定し、1 番目の反射位置を変える事で 2 つの反射を持つ MSW モデルの全体像を示した。それを図 17 に示す。具体的には、式 (19) における t_{r2} を 400 に固定し、 t_{r1} を 10 から 390 まで 10 刻みで変化させ、それぞれの反射関数に対して吹鳴圧を 0.5 から 1.0 までの範囲でステップ関数的に与え、どのような波形が安定化するか調

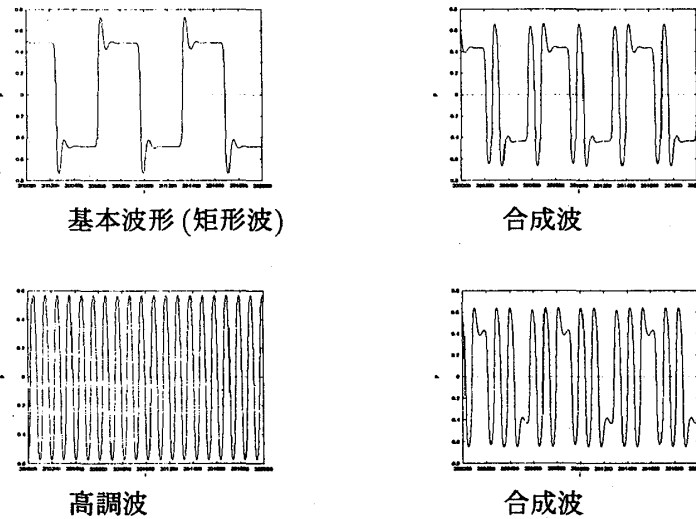


図 16: 一般的に現れる波形 (MSW モデル—ガウス関数型反射関数)

べている。また反射の大きさは $a_1 = -0.1, a_2 = -0.9$ とし、ガウス関数の分散は $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ としている。

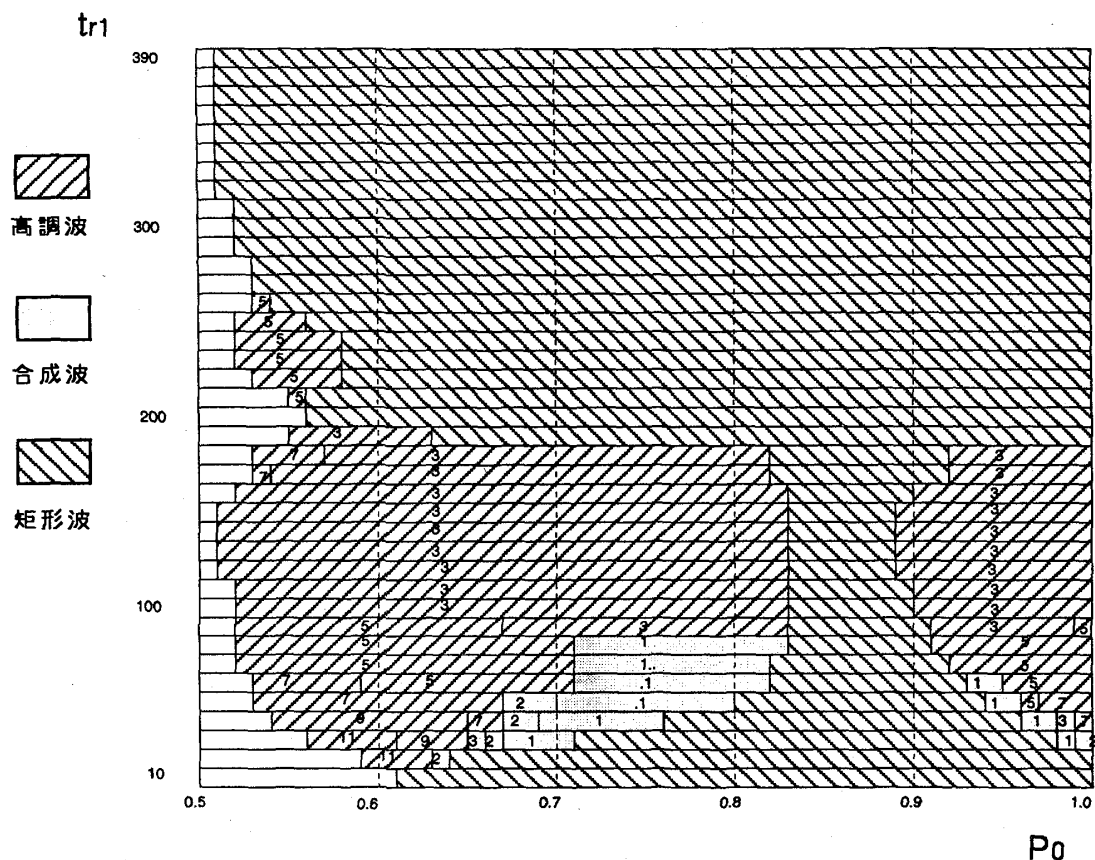
t_{r1} が 0 に近い程すなわち t_{r2}/t_{r1} が大きい程高次の高調波が発生している。しかし t_{r2}/t_{r1} が 13 付近 ($t_{r1} = 20, 30$) では高調波が 1.3 倍ではなく 1.1 倍になるなど、ガウス関数の分散による緩和が見られる。一般に 5 倍以上の高調波が発生する領域では、高調波の振動数を基本波の M 倍とすると $t_{r2}/t_{r1} \geq M$ の関係にあるが M がどの程度 t_{r2}/t_{r1} より小さくなるかはガウス関数の分散によって決まり、 σ_1, σ_2 がもっと大きな値を持つと、 $t_{r2}/t_{r1} = 13$ でも 9 倍や 7 倍の高調波しか現れない場合がある。 $100 \leq t_{r1} \leq 160$ の領域 (t_{r2}/t_{r1} が 3 の付近) では 3 倍高調波が非常に強く同時に基本波の発生領域が狭まっている。また $170 \leq t_{r1} \leq 260$ の領域 (t_{r2}/t_{r1} が 2 の付近) では 5 倍や 7 倍の高調波が現れている。これら高調波の発振する規則は水野, 池田 [8] が示した 2 重遅延フィードバック系の発振規則とほぼ合致している。 t_{r2}/t_{r1} が 5 を超えた領域 ($t_{r1} \leq 80$) で合成波が現れているが、この理由については Appendix A で解説する。

高調波の振動数は基本波の奇数倍となっており、偶数高調波は現れない。これは 2 つの負の反射を持つ 2 重遅延フィードバック系の一般的な性質であり、デルタ型反射関数の場合では偶数倍高調波は基本波の周期とうまくマッチせずフラストレーションを起こし準周期波となる (図 15, 19, 20)。しかしガウス型反射関数では、ガウス関数の分散によって準周期波が減衰し奇数高調波に落ち着くことが多い。

この結果から 2 つの反射を持つ MSW モデルの全体像が明らかになった。しかしこれはすべての変数の初期値を 0 とおいての計算結果であるため、すべての振舞を調べ尽くしたわけではない。そのためには様々な初期値を入力しなければならないが、 $t_{r2} = 400$ の場合では 400 個以上の変数に対する初期値が必要であるため現実的ではない。(組合せは変数の数^{初期値の数}だけある。)そこで次節では 4.4 節で導入した低次元化した MSW モデルを用いる。

5.1.3 $t_{r2}/t_{r1} = 2$ — 2 次元写像の振舞

$t_{r1} = 1, t_{r2} = 2$ の場合、MSW モデルは 2 次元写像と等価である事を第 4.4 節において示した。この 2 次元写像はどのような振舞を示すのであろうか。図 18, 20 に $a_1 = -0.1, a_2 = -0.9$ の場合の全体



図中の数字は高調波の場合は基本波に対し何倍の振動数かを示し、
 合成波の場合は矩形波の間に現れる高調波の数を表す。
 反射関数のパラメータは、 $a_1 = -0.1$, $a_2 = -0.9$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$, $t_{r2} = 400$, $t_{r1} = 10 \dots 390$ 。

図 17: ガウス型反射関数を持つ MSW モデルにおける反射の位置と吹鳴圧、発振波形の関係

的な分岐図の概略と各吹鳴圧での相図を示す。ただしこの相図は $(x_i, y_i), (x_{i+2}, y_{i+2}), (x_{i+4}, y_{i+4}), \dots$ をプロットしている。図 19 は $t_{r1} = 180$, $t_{r2} = 360$ のデルタ型反射関数での波形エントロピーと波形のパターンである。

一般の力学系で見られる固定点や 2 周期解, 安定 (不安定) トーラス, サブクリティカル分岐, 準周期解のロッキング現象が現れる。 $P_0 \leq 0.552$ で現れる固定点は空気が流入するだけで発振しない状態を表す。 $0.55 \leq P_0 \leq 0.552$ では、安定トーラス上の準周期解と固定点が共存しその間に不安定トーラスが存在する。その後不安定トーラスは固定点と衝突し消滅するが、準周期解は $P_0 = 0.645$ 付近でロックして基本波 (演奏音) である 2 周期解になる。図 20 の 2 周期解 ($P_0 = 0.8$) の相図には 4 つの点が現れているが、これは実際の (低次元化しない場合の) 基本波形が図 19 の $P_0 = 0.8$ のようになっているため、波形を $A, B, -A, -B, A, B, \dots$ とおくと相図上に $(A, B), (B, -A), (-A, -B), (-B, A)$ の 4 点がプロットされる。 $P_0 \geq 0.91$ の領域では 2 周期解は再び準周期振動を始め、 $P \geq 1$ では固定点が発生して準周期解と共存し、 $P_0 = 1.5$ では $P_0 = 0.55$ での分岐と逆の分岐を起こして準周期解が消滅し固定点のみとなる。この固定点はリードが閉まった状態を表す。図 19 中にある波形エントロピーで見ると、乱された部分 ($P_0 = 0.55 \dots 0.645, 0.91 \dots 0.999$) が準周期解、直線の部分が

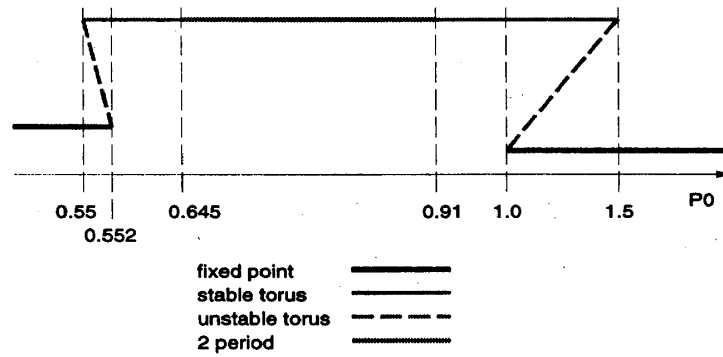


図 18: 2次元写像の分岐図概略 ($a_1 = -0.1, a_2 = -0.9$)

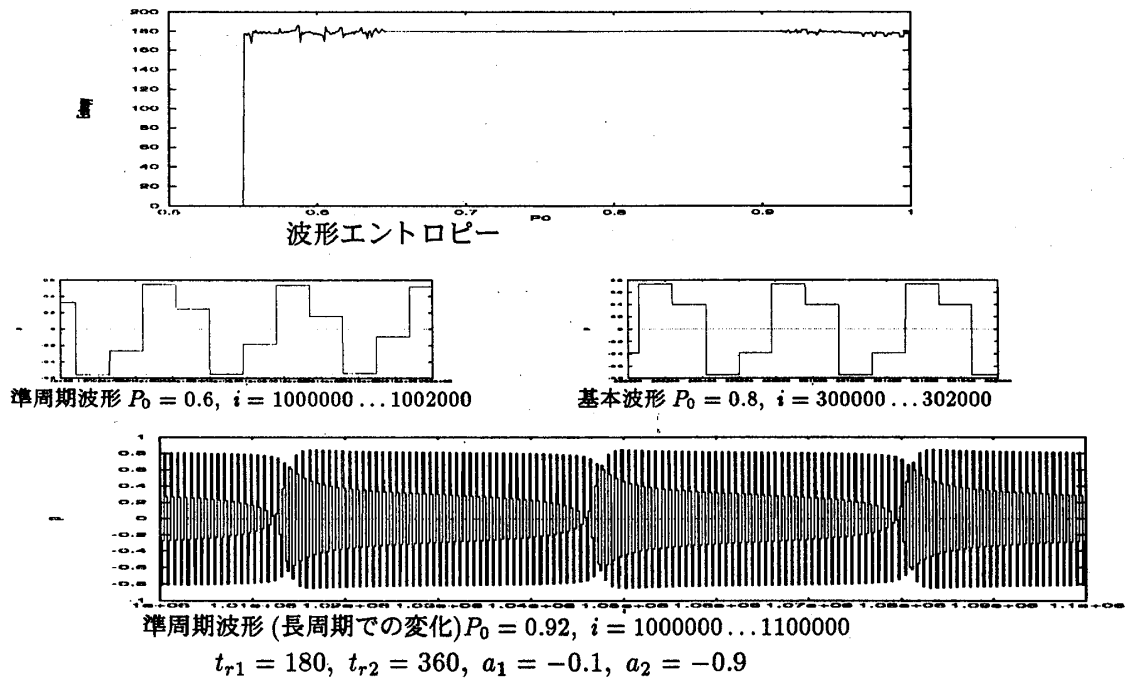
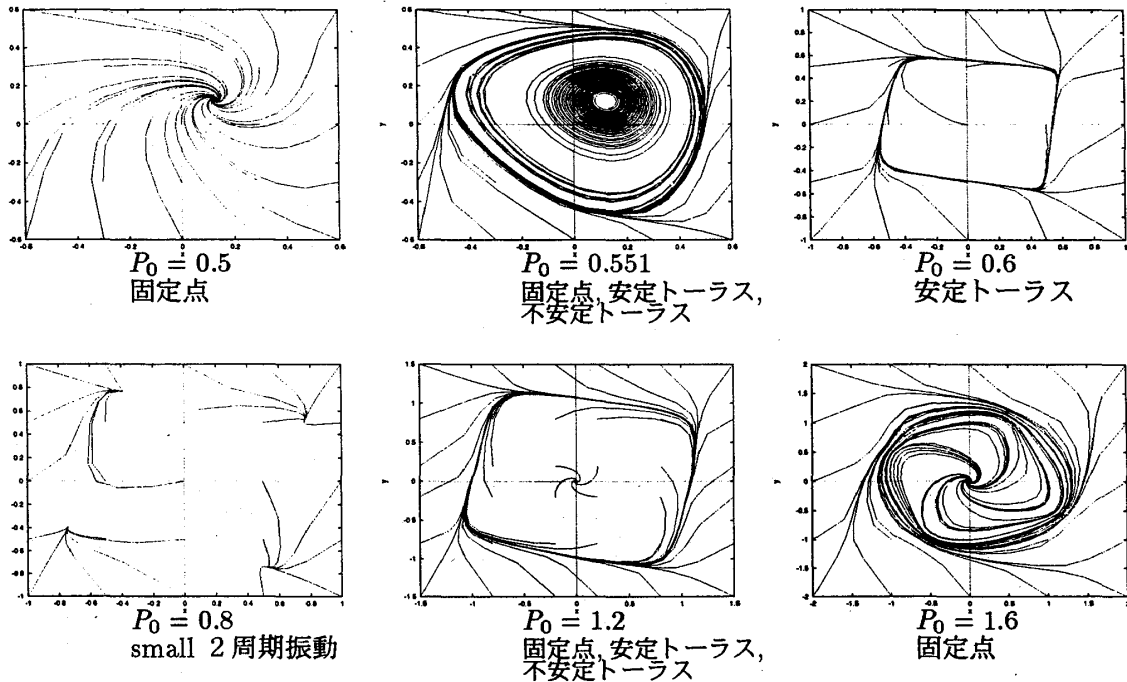
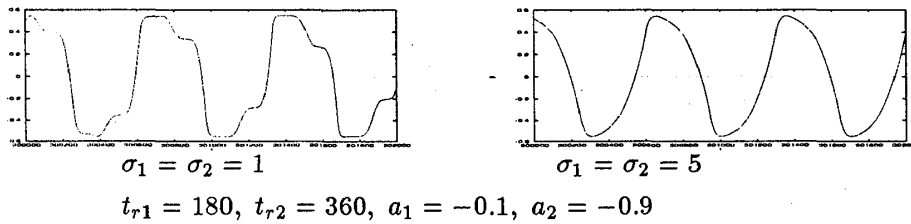


図 19: $t_{r2}/t_{r1} = 2$ のデルタ型反射関数を持つ MSW モデルの波形エントロピーと波形パターン

2 周期解である。

トラス上の準周期波形は直観的に分かりにくいかも知れないが、このような準周期振動は実際の管楽器でも発生する事があり、クラリネットでも真中付近の音孔だけを開けた場合うなりを伴う不安定な音が発音されやすい。したがって 2 次元写像でも現実の楽器の特徴を含んでいると考えられる。この準周期波形は 2 次元写像に限らず偶数次元の写像や t_{r2}/t_{r1} が偶数となるデルタ型反射関数を持つ MSW モデルで不変的に見られる。ガウス型反射関数でも t_{r2}/t_{r1} が偶数であれば準周期波形が現れるはずだが、実際には次のようにガウス関数の分散による減衰効果によって高調波に落ち着く場合が多い。

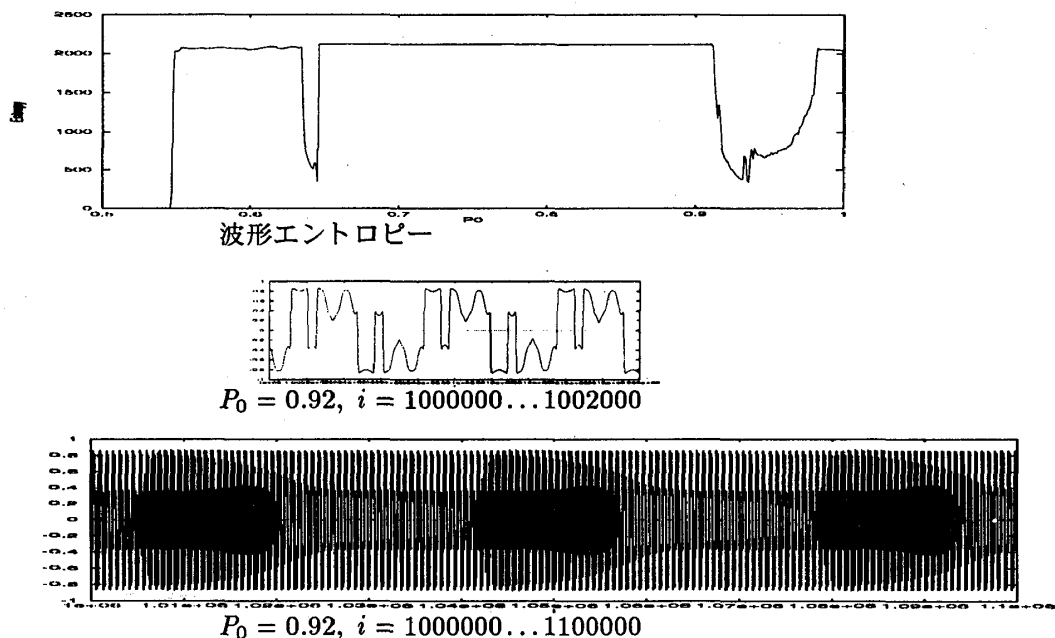

 図 20: 2 次元写像の相図 ($a_1 = -0.1, a_2 = -0.9$)


ところが $t_{r2}/t_{r1} = 2$ のガウス型反射関数で最初の反射の分散を大きくし 2 番目の反射の分散を小さくすると、非常に複雑な波形が現れる。 $\sigma_1 = 8, \sigma_2 = 1$ の場合の波形エントロピーと波形のパターンを図 21 に示す。

基本波の前後、準周期解がロックする寸前で準周期解が壊れて奇妙なパターンを作っている。またこの奇妙な波形が現れる領域は σ_1 が大きくなるにつれて増大する。しかしこの波形は複雑ではあるがカオスではなく準周期であり、デルタ型での準周期波形と比較すると長周期の構造を保持している事が分かった。(図 19 の波形と図 21 の波形を比較せよ。)

5.1.4 高次元写像での振舞

デルタ型反射関数の場合、前節の 2 次元写像と同様の手法によってより高次の写像を調べる事ができる。この節では 5 次元写像についての結果を示す。この場合は奇数次元写像であるため、準周期波は存在せず高調波、合成波、矩形波だけが出力されると予想された。しかしこの予想に反し、吹鳴圧の狭い領域で準周期波が発生した [28][21]。この波形と、波形の 2 乗平均を図 22 に示す。(この 2 乗平均は式 (30) での \log を取り除いたものであり、波形エントロピーと基本的性質は同じで



$$(\sigma_1 = 8, \sigma_2 = 1, t_{r1} = 180, t_{r2} = 360, a_1 = -0.1, a_2 = -0.9)$$

図 21: $t_{r2}/t_{r1} = 2$ で反射 1 の分散を大きくし反射 2 の分散を小さくした場合の波形エントロピーと波形パターン

ある。)

2 乗平均を見ると、基本波、2 種類の合成波、高調波以外に $P_0 = 0.64, 0.98$ の 2 点で準周期波が現れており、初期点をうまく設定すればその他の点でも現れる可能性が大きい。同様な準周期波は 7 次元写像でも発生するが、3 次元写像では見られない。この準周期波の詳細は現在不明であり今後の研究課題とする。

5.2 Schumacher モデル—吹鳴圧の断熱変化に対する応答

前節において MSW モデル + 2 重反射によって、クラリネットや疑似楽器の定性的性質がある程度再現できる事を示した。しかし井戸川らの実験の最も重要な結果であるヒステリシスを伴う遷移構造は、今のところ MSW モデルでは得られていない。本節では、Schumacher モデルが吹鳴圧の断熱的变化によって実験に類似した遷移構造を発生する事を示す。

Schumacher モデルの各パラメータは表 1にある通りだが、反射関数のパラメータは以下のように設定した。

$$a_1 = -0.03, a_2 = -0.88, t_{r1} = 0.4msec, t_{r2} = 3.2msec, \sigma_1 = 0.00007, \sigma_2 = 0.00002$$

この反射関数は、図 23に示す形をしている。

MSW モデルと同様に吹鳴圧をステップ関数で与えた場合の波形エントロピーは図 24のようになる。ただしこの波形エントロピーは、MSW モデルでのそれと比較するために、ルンゲクッタ法の時間刻み $1/100msec$ を単位時間として計算している。(すなわち、MSW モデルで $t_{r2} = 400$ の場合の基本波と、Schumacher モデルで $t_{r2} = 4.0msec$ の場合の基本波の波形エントロピーはほとんど同じ値となる。)

MSW モデルの波形エントロピーと比較すると、合成波が基本波の後に現れている事が分かる。MSW モデルでは吹鳴圧の上昇に伴って 高調波 → 合成波 → 矩形波 → (合成波) → 高調波 の順

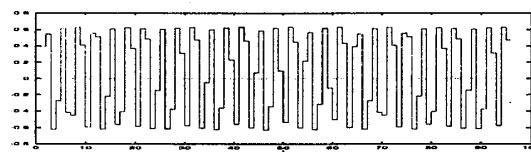
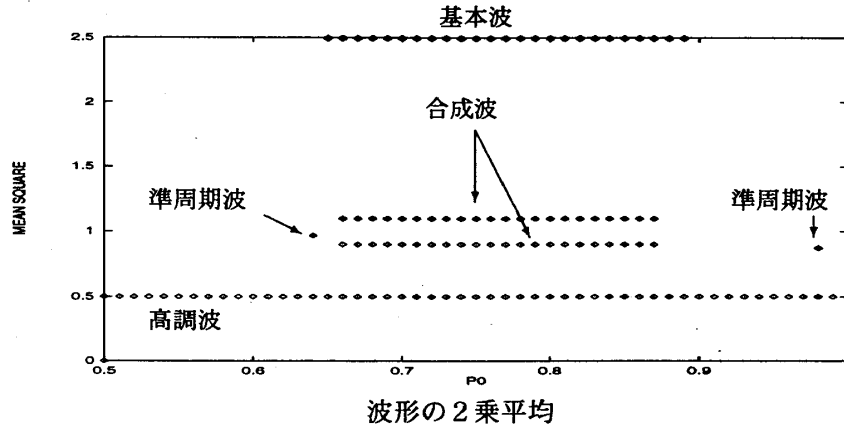
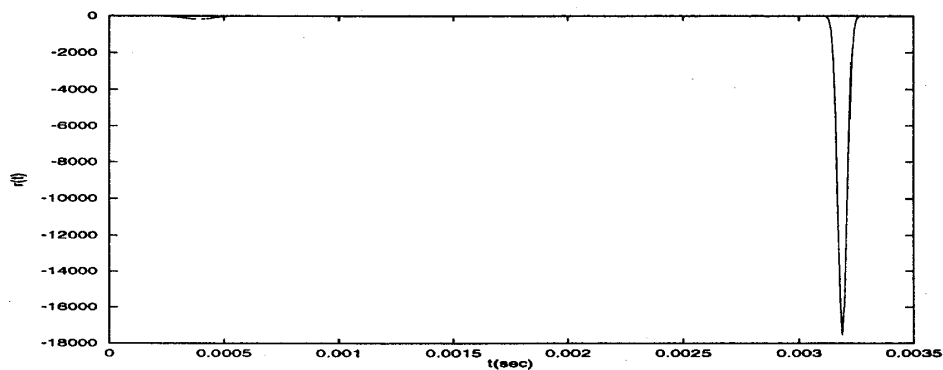

 準周期波形 ($P_0 = 0.64$)

 図 22: 5次元写像における波形の2乗平均と準周期波形 ($a_1 = -0.1, a_2 = -0.9$)


$$a_1 = -0.03, a_2 = -0.88, t_{r1} = 0.4 \text{ msec}, t_{r2} = 3.2 \text{ msec}, \sigma_1 = 0.00007, \sigma_2 = 0.00002$$

図 23: Schumacher モデルのシミュレーションで用いた反射関数

に波形が現れるが、Schumacher モデルでは一般に 高調波 → 矩形波 → 合成波 → 高調波 の順で現れる。しかしこの反射関数の場合はそれだけではなく、図 24 中の $P_0 = 9.3 \text{ kPa}$ と $P_0 = 9.4 \text{ kPa}$ のように似た波形であっても若干の形状の違いが存在するため、波形エントロピーも MSW モデルのそれより複雑である。

次に今用いた反射関数で、吹鳴圧を断熱変化させた場合に現れる遷移構造について説明する。以下に説明する波形は次の表記法に従う。

- 基本波 (矩形波) : B (基本波の亜種は B' とする)
- 合成波 : C? (?は一周内のピークの数)
- 高調波 : H? (?は基本波の振動数に対して何倍の振動数を持つかを表す)
- その他 : X (分類不可能な波形)

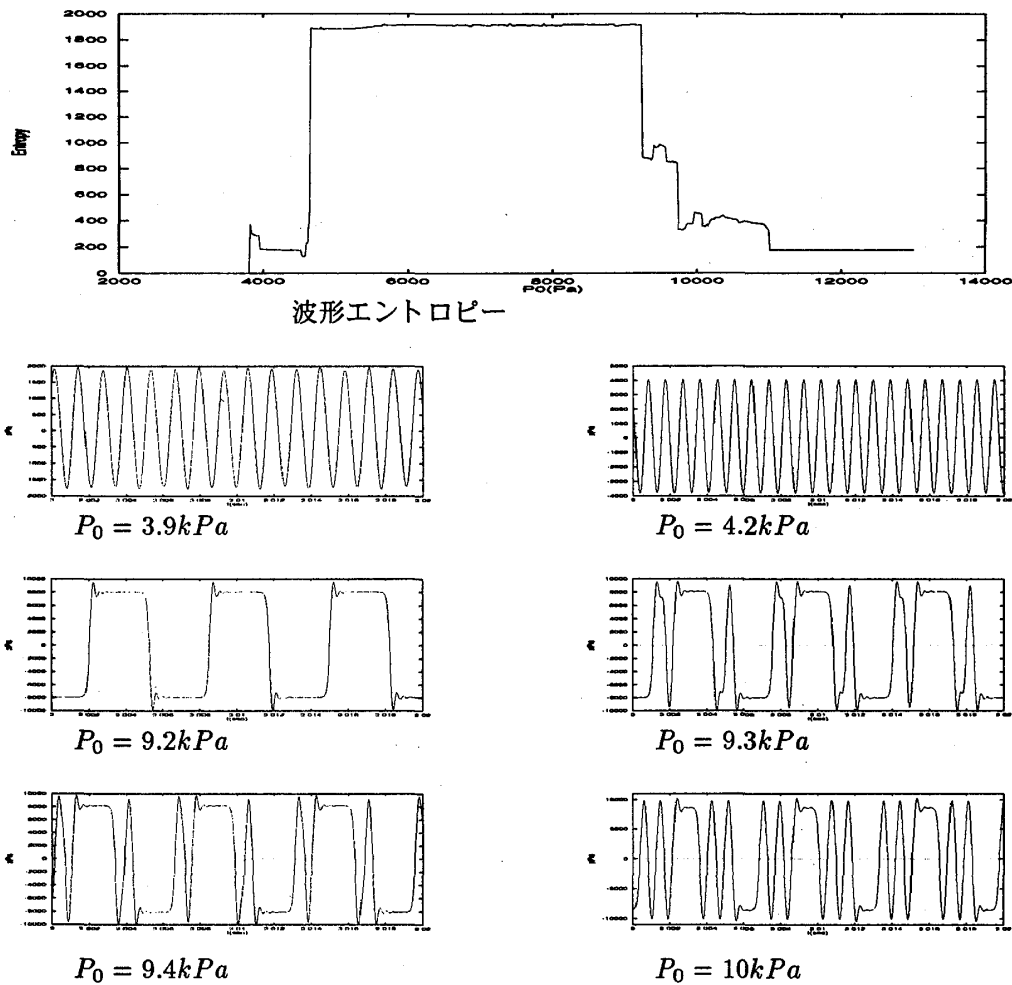


図 24: Schumacher モデルにおける波形エントロピーと音圧波形

同一の表記になった場合は小文字のアルファベット (a, b, ...) で分類する。(井戸川らの実験で $D_3, C_6^\#$ 等の記号があるがこれは発生した音の周波数が平均律音階のどの音に近いかを表し上述の表記法とは異なる。)

発生した遷移構造の大まかな流れを見るために、吹鳴圧を 0 から 15kPa まで 1kPa/sec で上昇させそこから逆に 1kPa/sec で下降させた場合の波形の変化を図 25, 26 に示す。図 27 は波形間の変化の模様を表している。

吹鳴圧の上昇に伴いまず高調波 H5a が現れる。この H5a は基本波の 5 倍の振動数を持つがこれはゆっくりと形を変え合成波 C5 になり、C5 は 6.8kPa 付近で基本波 (演奏音) B に遷移する。この B は発振が停止する直前に形を崩し、矩形波の亜種 B' となって終了する。そのまま吹鳴圧を 15kPa まで上昇させそこから逆に下降させると、まず合成波 C3 が現れる。C3 は 7.5kPa 付近で B に変化するが、吹鳴圧が約 5kPa より小さくなるとリードが閉まらなくなり B は次第に形を崩して H7 に遷移して発振は停止する。図 27 の B が H7 に遷移するグラフからわかるようにリードが閉まる事で基本波 (矩形波) は安定して発振しており、これは MSW モデルにおいて $p < P_c$ で $U = 0$ となる事が 2 周期解を生み出す事に対応する。

また実験では、吹鳴圧をただ 0 から上昇させて下降させるだけでなく途中で一定にしたり変化

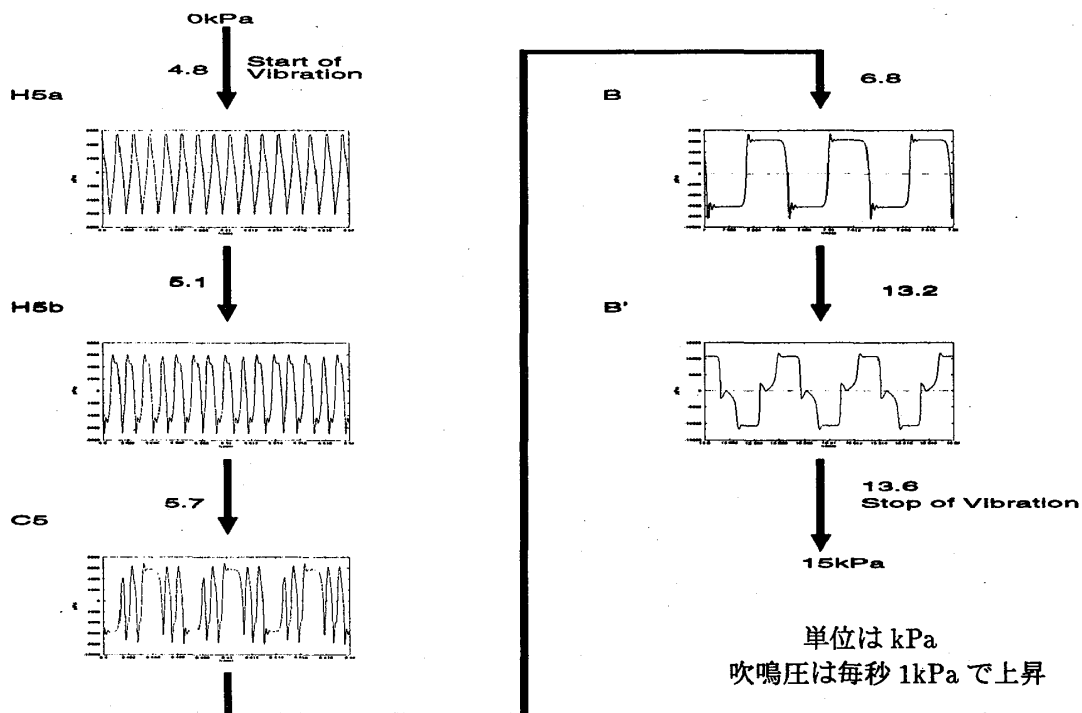
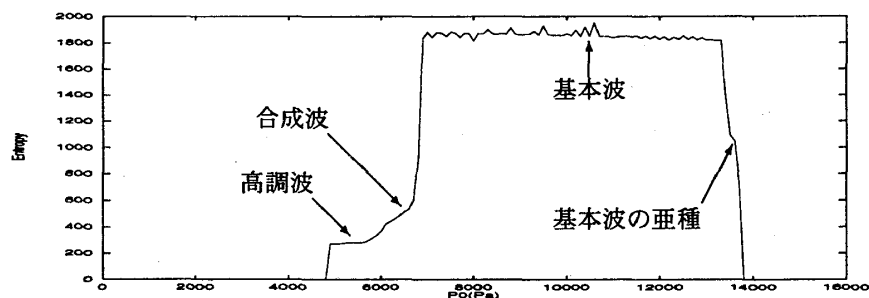


図 25: 吹鳴圧の上昇による Schumacher モデルの波形の遷移 (0 から 15kPa まで 1kPa/sec で上昇)

速度を変えたりしている。そこでこの反射関数でも同様の操作を行なって見たところ、図 28 に示す遷移ダイアグラムが得られた。ただ上昇下降させるだけでは見られなかった波形が現れている事が分かる。これらの波形と $p-U_f$ 曲線を図 29, 30, 31 に示す。吹鳴圧の下降時の発振停止前に現れる H5c, H9, H7, X はそのピークが変調されており、この変調周期は基本波の周期に近いが厳密に一致していない。おそらくこれらの波形は マウスピースからの反射による周期 $t_{r1} \times 2$ 、基本波の周期 $t_{r2} \times 2$ 、リードの振動数がフラストレーションを起こし、その結果不安定な振動をしていると考えられる。このような不安定な波形は疑似楽器よりもクラリネットによく見られる ([19], [22])。

この遷移構造及び出力波形が、疑似楽器の $C_{3b}^\#$, $C_{3c}^\#$ (図 12) に似た合成波を持つ事、また振動数の異なる複数の高調波が現れる事、 $p-U_f$ 曲線の形状が似ている事等多くの点で疑似楽器の実験結果と類似している事が分かる。

ところでこのような遷移構造は他の反射関数やパラメータの組合せでは出ないのであろうか？これを調べるために、短時間波形エントロピーを用いる。吹鳴圧を断熱変化させている最中に 0.1sec 単位で波形エントロピーをとれば、ある時刻もしくは吹鳴圧でどの波形が現れているかを簡単に知る事ができる。例えば図 25 の結果を用いて、横軸に吹鳴圧、縦軸にその吹鳴圧での短時間波形エントロピーをプロットすると、次のようになる。



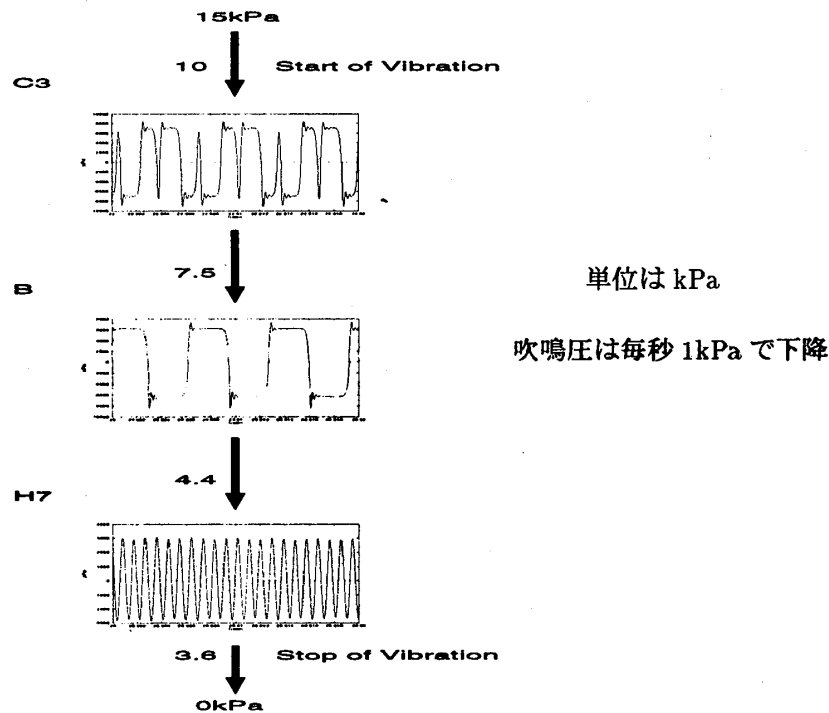


図 26: 吹鳴圧の下降による Schumacher モデルの波形の遷移 (15kPa から 0 まで 1kPa/sec で下降)

このグラフを見ると短時間波形エントロピーのグラフ中での最大値と最小値に差があれば、それは遷移が起こった事を示している事が分かる。また基本波の波形エントロピーはほとんどの場合他の波形よりも大きいため、最大値を調べれば基本波が含まれているかどうかを知る事ができる。図 32 はリードの共振周波数 ω_0 、及び自然開口幅 x_0 を横軸にとり、縦軸にそのパラメータでの短時間波形エントロピーの最大値及び最小値をプロットしたものである。ただし吹鳴圧は 0 から 15kPa まで 1kPa/s で変化させた。波形エントロピーの値が 2000 付近は基本波、100..300 付近が高調波、その中間が合成波を表す。最小値をプロットした下の線はほぼ 270 前後で一定であり 5 倍高調波がどの場合でも存在する事を表す。ところが最大値をプロットした下の線は上下に乱高下しており、パラメータに対して非常に敏感であることが分かる。自然開口幅 x_0 に注目すると 0.78mm 以下では基本波を含む遷移が出なくなっている。しかし 0.78mm 以上では矩形波を含む遷移と合成波を含む遷移、高調波のみの場合が交互に現れる。そこで 0.79mm と 0.81mm の間を拡大するとさらに細かい構造が現れる。共振周波数 ω_0 もフラクタル的な構造を持っており、図には無いが反射関数のパラメータ (t_{r1}, σ_1) でも同様な敏感性が得られている。

5.3 議論

MSW モデルでは吹鳴圧をステップ関数として与えた場合の、Schumacher モデルではステップ関数の場合と断熱変化させた場合の応答について研究した。それぞれのモデルにおいて分かった点及び疑問点をまとめて見る。

MSW モデル 2つの分散が等しく 2つの反射の遅延時間の比 t_{r2}/t_{r1} が整数ならば、ガウス型反射関数の出力波形は基本波 (矩形波)、奇数倍高調波、合成波に分類できる。これらの波形は、クラリネットマウスピース+円筒管の実験で見られる波形と類似しており、吹鳴圧の低い領域で高調

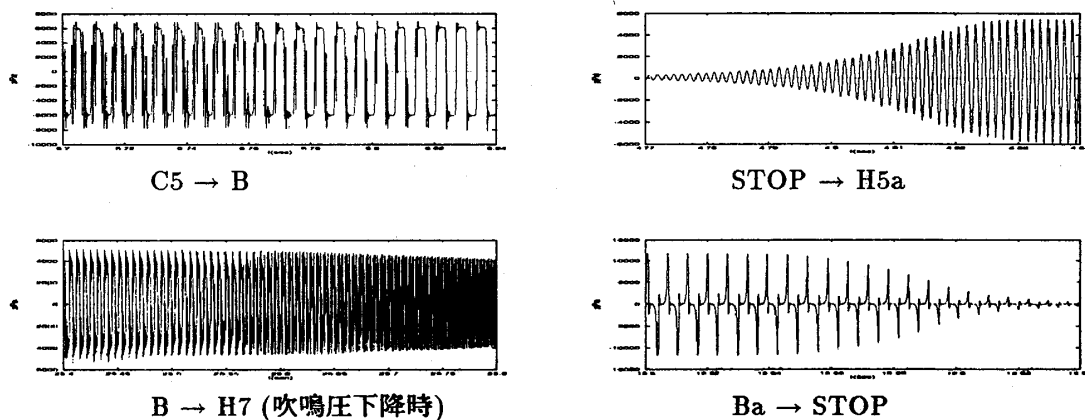


図 27: Schumacher モデルにおける波形の遷移の様子

波が高い領域で基本波が発生しやすい点も、実験の遷移構造に近いと言える。また実験で3倍や5倍高調波が現れていないことから、 t_{r2}/t_{r1} は7以上である事が予想される。MSW モデルを低次元化しその基本的性質を調べた結果、最も簡単な2次元写像では力学系一般によく見られるサブクリティカル分岐とトラス上の準周期振動及びそのロッキングによる2周期解が現れている事が分かった。しかし $t_{r2}/t_{r1} = 2$ のガウス型反射関数で前の分散を大きくし後ろの分散を小さくすると奇妙な形をした準周期解が得られた。5次元写像では奇数倍高調波や合成波、基本波以外にも準周期波が得られた。本論文で示したMSWモデルのシミュレーション結果は、すべて吹鳴圧をステップ関数的に与えているが、実験のように断熱的变化をさせると今のところ実験に対応するような遷移は得られていない。これについては更にシミュレーションを行なわなければならないが、MSWモデルでは実験のような遷移を発生しにくい可能性がある。その根拠は、実験結果やSchumacherモデルでの遷移構造を見ると遷移にリードが深く関わっている事が予想されるのに対し、MSWモデルはリードの効果を無視しているところにあり、逆にMSWモデルにリードの効果を入れれば発振機構に対するリードの役割をかなり明確に論じる事ができるかも知れない。

Schumacher モデル Schumacherモデルでは、反射関数をうまく設定する事によって非線形性を強めなくても実験に類似な遷移構造(波形のパターンや $p-U_f$ 曲線も含めて)を発生する事ができた。またこの遷移構造はパラメータに対し非常に敏感である。実験でもマウスピースのくわえ方のちょっとした違いによって異なった遷移構造が現れており、その点でも実験と類似している。しかしシミュレーションで得られたパラメータ敏感性は実験でのそれよりかなり大きい。シミュレーション結果を詳細に調べると、これ以外にもいくつかの相違点が存在する。主な相違点としては、

- 実験では発振停止状態から吹鳴圧を下降させた場合、高調波もしくは基本波が現れるのに対しシミュレーションでは基本波Bか合成波C3が現れている。
- 実験では吹鳴圧が3kPa前後から発振が始まるのに対し、シミュレーションでは5kPa弱から発振し始める。
- 実験では見られない5倍高調波(H5,H5a等)や合成波(C5,C5a,C5b)が現れる。

があげられる。これらの違いが現れる理由が実験特有のノイズや吹鳴圧制御の誤差によるものかそれとも実験結果を説明するためにモデルにまだ不十分な点があるのかは現在のところ不明である。

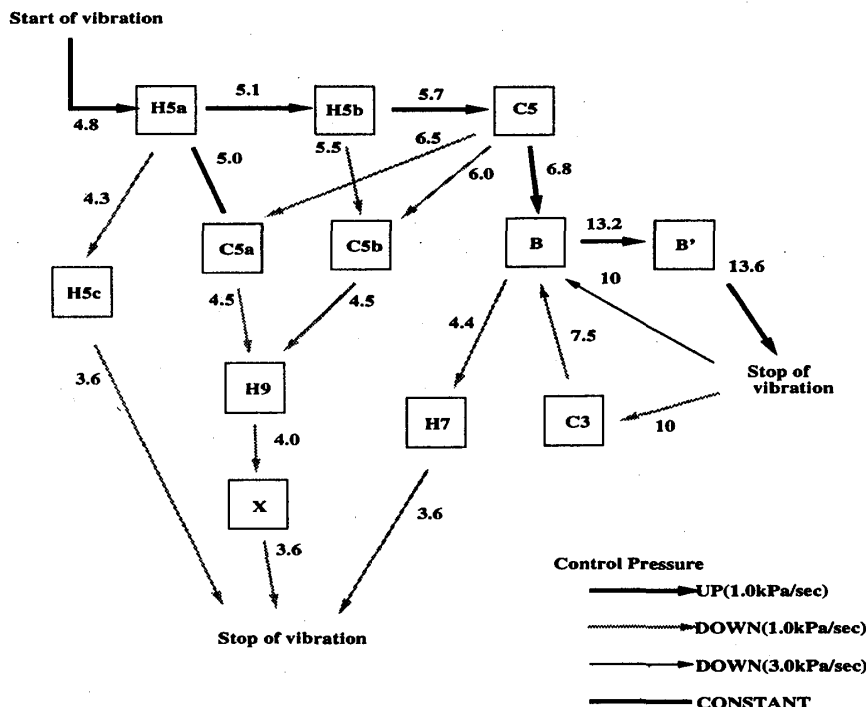


図 28: 吹鳴圧を様々に変化させた場合に現れる遷移 Diagram 数字は吹鳴圧 (kPa)

り、完全に実験結果を再現できたとは言えない状況である。しかし少なくとも Schumacher モデルが従来の研究で行われてきた定性的性質 (演奏波形の再現等) だけでなく、人工吹鳴実験で得られたダイナミックな性質もかなり含んでいる事は間違いないと考えられる。以下に今後の研究課題をまとめてみた。

遷移構造の詳細な解析 遷移構造 (図 28) の各波形の安定領域及び不安定後の遷移先を調べ、さらに詳細なダイアグラムを作成する。またパラメータや反射関数を変えた場合の遷移構造 (基本波が現れないものも含む) についても同様に調べる必要がある。

遷移構造のパラメータ敏感性 遷移構造のパラメータに対する敏感性について、その他のパラメータ (G_r , Z_0 等) でも計算する。どのパラメータに対してより敏感かによって遷移構造に深く関わるパラメータを抽出できる。

合成波の不安定化 クラリネットや疑似楽器の実験では、図 12 の $C_{3m}^\#$ 等を除けば 5 倍高調波や合成波はほとんど現れない。シミュレーションで現れる合成波や 5 倍高調波が、実験では何らかの原因で不安定化しカオスや準周期的な振舞を示す可能性は大きい。準周期波と高調波、合成波の関連や不安定化について、Schumacher モデルだけでなく MSW モデルや低次元化した写像においても調べる必要がある。

リードの性質 リードの性質はより積極的にモデルに取り込む必要がある。Schumacher モデルではリードは調和振動子として近似しているが、それで十分に実際のリードを記述できているか疑問がある。リードは先のほう程薄くできており、マウスピースのリードと接する面 (フェイシングと呼ばれる) は、若干丸みが付けられている。さらにリードは唇によって押え付けられ唇からの圧力とダンピングを受けている。これらを考慮しつつできるだけ簡単なリードモデルが作れば、かなり現実に近いシミュレーションができるものと考えられる。

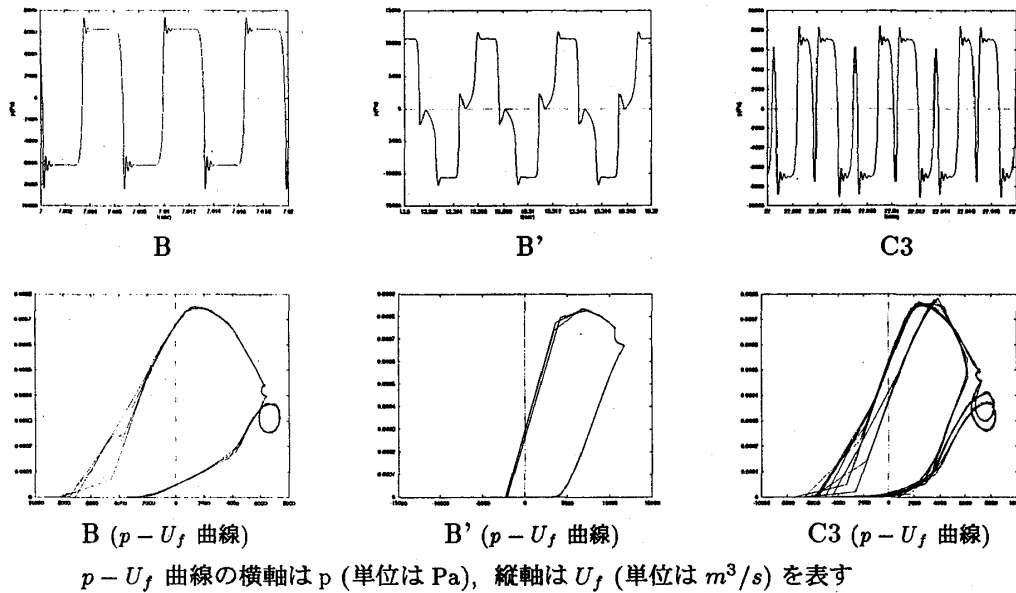


図 29: 遷移 Diagram 内に現れる波形のパターン 1

ベルヌーイカの影響 従来シングルリード木管楽器ではベルヌーイカは無視される場合が多かった。実際本研究においてステップ関数で吹鳴圧を与えた場合は無視しても差し支えなかったが、断熱変化させる場合は非常に大きな影響が出た。本論文の断熱変化による遷移構造はベルヌーイカを無視したシミュレーションから得られているが、実験を詳しく見るとベルヌーイカによって駆動されていると見られる波形がいくつかあり、さらにベルヌーイカはそれを見無視した場合と比べ、より低い圧力から発振を起こすことができる等いくつかの点で実験に近い性質を持つ。しかし反面通常の高調波が出なくなる等の問題点もあり、両方の性質をうまく反映するモデルが必要である。

現実の管体形状 本論文ではガウス関数とデルタ関数によって反射関数を作ってきた。これは系の基本的性質を調べるために必要な事ではあるが、やはり実際の管体から計算した反射関数を用いたシミュレーションも必要であろう。ただし従来の計算法でマウスピースの複雑な3次元形状を1次元の反射関数でうまく表現できるかどうか不明なため注意が必要である。

吹鳴圧のステップ関数的変化に対する応答 MSW モデルと同様に吹鳴圧をステップ関数的に与え図 17 に対応する全体図を得る事は、2重反射を持つ Schumacher モデルの出力可能な波形パターンを調べたり MSW モデルの低次元写像との比較のためにも必要である。

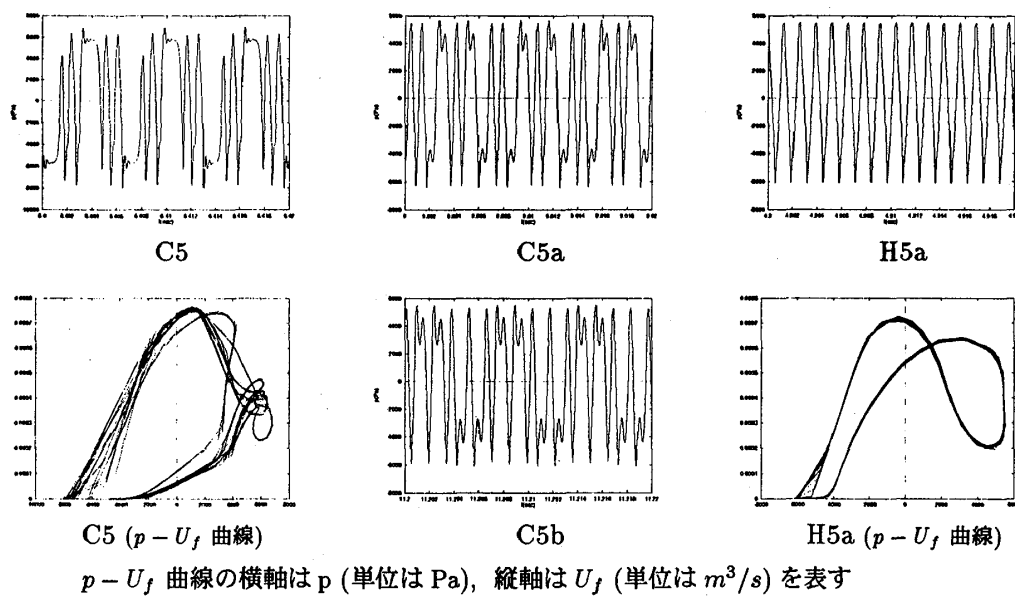


図 30: 遷移 Diagram 内に現れる波形のパターン 2

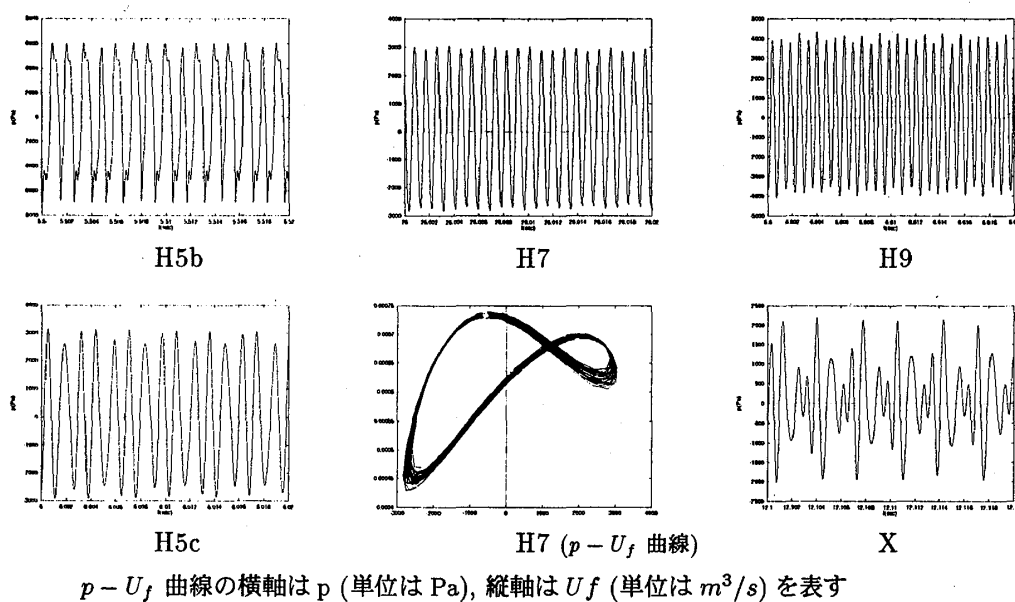


図 31: 遷移 Diagram 内に現れる波形のパターン 3

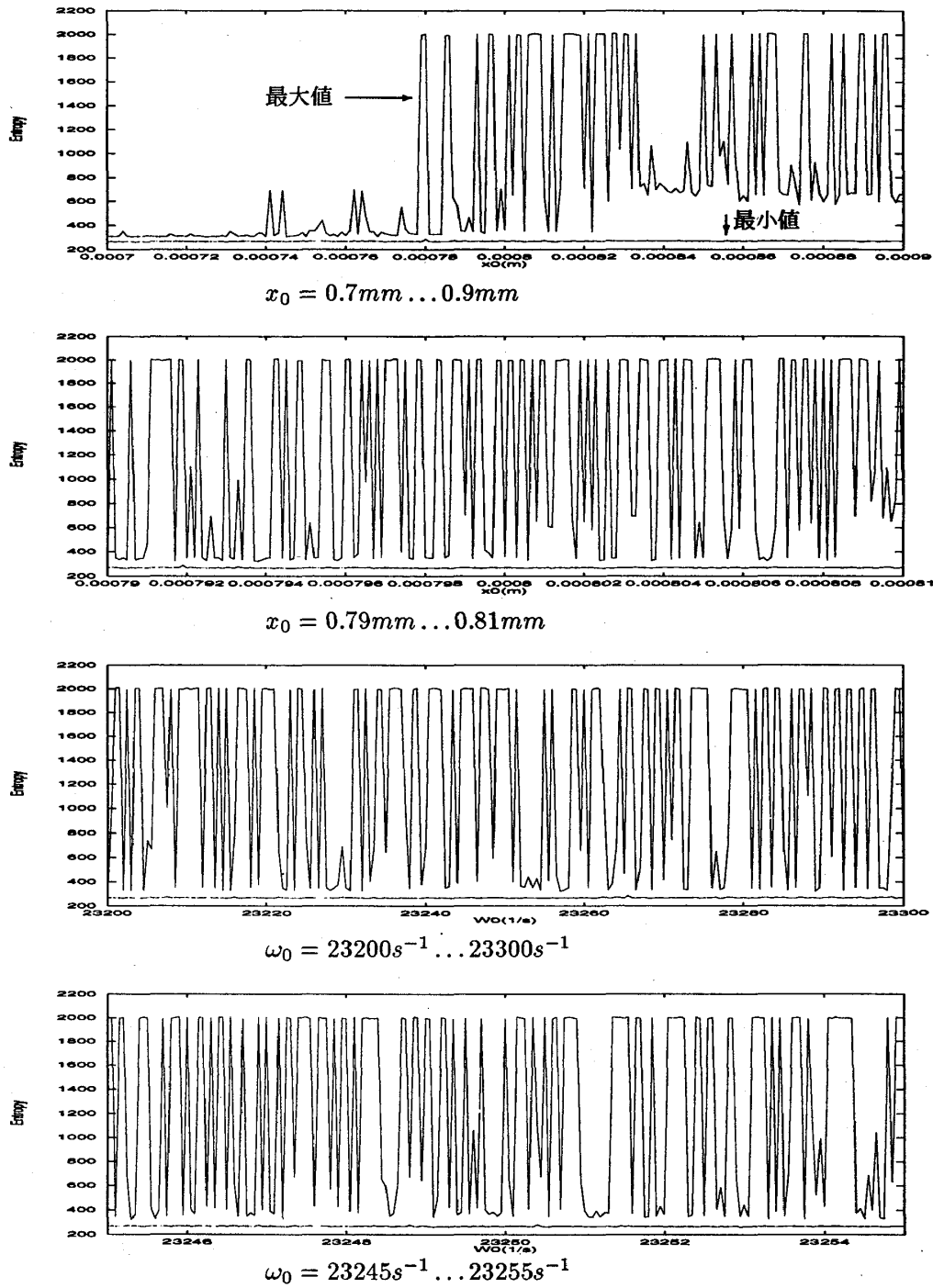


図 32: Schumacher モデルに現れた遷移構造のパラメータ依存性

6 結論

本研究は木管楽器の発音機構、特に井戸川らの実験で得られた遷移構造及びその発生メカニズムの解明を目的とし、その第一歩として既存のクラリネットモデルである MSW モデルと Schumacher モデルのシミュレーションを行ない、実験結果や現実の楽器の特徴がどこまで再現できるか調べた。その際マウスピースの非線形性は弱く設定し管体での反射はマウスピースと管端の2つだけであると仮定した。

MSW モデルでは吹鳴圧をステップ関数的に与えて、シミュレーションを行なった。その結果マウスピースでの反射と管端での反射を考慮する事によって、疑似楽器の実験で見られる波形と同様の特性を持つ波形を得る事ができた。また実験と同様に、吹鳴圧の低い領域で高調波が出やすく高い領域で基本波が出やすいという特性を持つ事も分かった。MSW モデルを低次元化し系の基本的性質についての解析を行なった結果、2次元写像系において準周期解や固定点、2周期解が得られ、一般的な分岐理論から説明できる事が分かった。しかし現在のところ井戸川らの実験結果で最も重要なヒステリシスを伴う複雑な分岐構造は現れていない。更なるシミュレーションが必要ではあるが、MSW モデルには遷移を起こす機構が欠如している可能性は高い。

Schumacher モデルでは吹鳴圧を断熱的に与えてシミュレーションを行ない、複雑な遷移構造及び多数の波形が生成された。この遷移構造は、吹鳴圧の低い領域で高調波が発生し高い領域で矩形波が現れている点や、複数の高調波が共存している点、波形のパターン、 $p-U_f$ 曲線が似通っている点等の実験に類似の特性を多く持ち、いくつかの相違点を除けば実験をかなり忠実に再現できたといえる。この事実は Schumacher モデル及び2つの反射を持つ反射関数の正当性を証明するとともに、遅延フィードバックシステムではパラメータの断熱変化がシステムに複雑な性質を与える事を示している。この系は多くの安定波形の共存やパラメータに極度に敏感な遷移構造などを持ちつつもカオティックな波形は出力しない等、従来研究されてきた強非線形性によるストレンジアトラクターとは本質的に異なるように見える。これらの振舞は力学的にも興味深いものであるが、その本質は未だ不明であり今後の研究に期待される。

これらのシミュレーション結果から、本研究のモデル化の指針である弱非線形性と2重遅延フィードバックによってシングルリード木管楽器の基本的な性質をある程度記述できる事が分かった。しかしいくつかの相違点も存在するため、このシミュレーション結果を更に詳細に調べて現状のモデルの問題点を洗い出し、より簡単かつ本質的なモデル化を進めていく必要がある。現時点では木管楽器の振舞にはリードが深く関わっており、リードのモデル化がうまくできればかなりの部分が解明できると予想される。

井戸川らの人工吹鳴実験や本研究のシミュレーションによって明らかになったシングルリード木管楽器の複雑性や不安定性が、実際の木管楽器の素晴らしい音色や豊かな表現力に直接関係しているかどうか現時点でははっきりしない。しかしそもそもシミュレーションで簡単に再現できるような楽器が、名演奏家のテクニックに対応できるのか、微妙な音色の変化をとらえる音楽好きの耳を楽しませる事ができるのか、甚だ疑問である。研究の進展につれて課題の増えていく事が、逆に MSW モデル、Schumacher モデルのクラリネットモデルとしての正しさを傍証しているのかも知れない。

A 基本的な波形パターンの生成規則

本研究で得られる定常波形のパターンは、準周期波形を除けばそれほど多くはなく(図 15,16)、ある程度予測できるものである。以下その理論を低次元化した MSW モデルを例として簡単に解説する。

4.4節において1次元写像が2周期解 $(P, -P, P, -P, \dots)$ を生成する事を示した。ここで P を '+'、 $-P$ を '-' とおき、すでに安定な2周期解が発生しているとする。まずもっとも簡単な例として $a_1 = 0, a_2 = -1, t_{r2} = 3$ の3次元写像の場合を考えてみる。(正確には3次元写像ではなく3つの1次元写像が連続している場合であるが。)3つの変数を $x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}$ で表すと、この場合写像関数は

$$\begin{aligned} \text{if } x_{1,i} = + \text{ then } & x_{1,i+1} = - \\ \text{if } x_{1,i} = - \text{ then } & x_{1,i+1} = + \\ & x_{2,i}, x_{3,i} \text{ も同様} \end{aligned}$$

となる。仮に初期値として $(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}) = (+, +, +)$ が与えられていれば、時系列として $+++,-,-,-,+++,-,-,-,\dots$ が現れる事になる。ではこの3次元写像で現れる時系列のパターンには何が存在するのか?例えば $(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}) = (+, +, -)$ の場合は $++-,-,-,++-,-,-,\dots$ であるが、これは先の $+++,-,-,-,+++,-,-,-,\dots$ と波形としては同じものである。従ってこの3次元写像で現れる定常波形としては

$$\begin{aligned} \text{初期値が } (x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}) = (+, -, +), (-, +, -) \text{ 等の場合} \\ \dots + - + - + - + - + - + - + - + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{初期値が } (x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}) = (+, +, +), (-, -, -) \text{ 等の場合} \\ \dots + + + - - - + + + - - - + + + - - - \dots \end{aligned} \quad (31)$$

の2種類しか有り得ない。そして(30)が高調波(3倍高調波),(31)が基本波に対応している。

同様に4次元写像($a_1 = 0, a_2 = -1, t_{r2} = 4$)の場合及び5次元写像($a_1 = 0, a_2 = -1, t_{r2} = 5$)の場合に生成される波形のパターンを以下に示す。

● 4次元の場合

初期値の一例	時系列	波形の種類
++++	++++-----++++-----	基本波(矩形波)
++-+	++-+-+--+--+--+--+--+	合成波

● 5次元の場合

初期値の一例	時系列	波形の種類
+++++	+++++-----+-----	基本波(矩形波)
+ - + - +	+ - + - + - + - + - + - + - + - + -	高調波
+ - + + +	+ - + + + - + - + - + - + - + - + -	合成波
++-++	++-++-+-+--+--+--+--+--+	合成波

4次元写像の場合高調波は現れていない。なぜならば、 $(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, x_{4,i}) = (+, -, +, -)$ が初期値として与えられているとすると、高調波が持続するためには $x_{1,i+1}$ は '+' にならなければならない。しかし $x_{1,i}$ は '+' であるため $x_{1,i+1}$ は '-' になってしまい、 $+-+-,-+-,-+-,-+-,-+-,-+-$ が時系列として現れてしまう。これは4次元での合成波と等しい。もし4次元写像で高調波を出そうとするなら、例えば $t_{r1} = 1, t_{r2} = 4, a_1 < 0, a_2 < 0$ の場合であれば $|a_1|$ を $|a_2|$ よりもかなり大きくする必要がある。

6次元以上であっても同様に考えられる。また2つの反射をもつ場合でも $|a_1|$ が $|a_2|$ に対し、十分小さければ同様の議論が成り立つ。(実際本研究で用いた $a_1 = -0.1, a_2 = -0.9$ の反射関数ではほぼ上記の規則に従っている。) しかし本論で示した通り反射関数の形状や初期値によっては現れない波形もあり、ここで紹介した波形以外の定常波形として準周期波形が現れる場合も多い。

B 反射関数と音響インピーダンスの関係

インパルス応答のフーリエ変換を管体の音響インピーダンスと呼ぶ。

$$Z(\omega) = F\{g(t)\} \quad \dots F: \text{フーリエ変換}$$

音圧 p , 流入流量 U のフーリエ変換 $\hat{p}(\omega), \hat{U}(\omega)$ と音響インピーダンス $Z(\omega)$ の間には次の関係がある。

$$\hat{p}(\omega) = Z(\omega)\hat{U}(\omega) \quad (32)$$

ここで9式をフーリエ変換すると、

$$\hat{p} = \hat{r}(\hat{p} + Z_0\hat{U}) + Z_0\hat{U} \quad (33)$$

32式と33式から、 \hat{p}, \hat{U} を消去すると音響インピーダンスと反射関数との関係式

$$r(t) = F^{-1}\left\{\frac{Z(\omega) - Z_0}{Z(\omega) + Z_0}\right\}$$

が得られる。一般には、管体形状から音響インピーダンスを計算し上式に代入して反射関数を得る。管体形状から音響インピーダンスを計算する方法は[2],[10]に詳しい。また反射関数を積分すると、

$$A = \int_0^\infty r(t)dt = \frac{Z_{00} - Z_0}{Z_{00} + Z_0} \quad \dots Z_{00}: \text{管の直流抵抗}$$

が得られる。Schumacher[11]は $Z_{00} = 0.01Z_0$ としており、その場合 $A \approx 0.98$ となる。

謝辞

本研究にあたって、指導教官である九州工業大学高橋公也助教授には、理論、シミュレーション、および本論文作成の全般に渡って丁寧に御指導していただき、深く感謝致します。筑波大学名誉教授であり現在埼玉工業大学で教鞭をとっておられる井戸川徹教授には、様々な論文や非公開も含む多くの実験データを惜しみなく提供していただきました。さらに直接実験について伺う事ができ、本研究を進めるにあたり大きな力となりました。ここに厚く感謝致します。小島博士には研究会での議論や実験の見学を通じて多くの御協力をいただき大変参考になりました。深く感謝致します。立命館大学池田研介教授には折に触れて貴重なアドバイスをいただき、厚く感謝致します。また本論文作成にあたり有形無形の協力をしていただいた研究室のみなさまに深く感謝致します。

参考文献

- [1] C.J.Nederveen. *Acoustical aspects of woodwind instruments*. Frits Knuf, Amsterdam, 1969.
- [2] G.R.Plitnik and W.J.Strong. Numerical method for calculating input impedances of the oboe. *J.Acoust.Soc.Am*, Vol. 65, pp. 816–825, 1979.
- [3] Tohru Idogawa, Tokihiko Kobata, Kouji Komuro, and Masakazu Iwaki. Nonlinear vibrations in the air column of a clarinet. *J.Acoust.Soc.Am*, Vol. 93, , 1993.
- [4] J.Backus. Vibration of the reed and the air column in the clarinet. *J.Acoust.Soc.Am*, Vol. 33, pp. 806–809, 1961.
- [5] J.Backus. Small vibration theory of the clarinet. *J.Acoust.Soc.Am*, Vol. 35, pp. 305–313, 1963.
- [6] L.J.Sivian. Acoustic impedance of small orifices. *J.Acoust.Soc.Am*, Vol. 7, , 1935.
- [7] M.E.McIntyre, R.T.Schumacher, and J.Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *J.Acoust.Soc.Am*, Vol. 74, pp. 1325–1345, 1983.
- [8] M.Mizuno and K.Ikeda. An unstable mode selection rule : Frustrated optical instability due to competing boundary conditions. *Physica*, Vol. 36, pp. 327–342, 1989.
- [9] N.H.Fletcher and T.D.Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [10] R.Caussé, J.Kergomard, and X.Lurton. Input impedance of musical instruments – comparison between experiment and numerical models. *J.Acoust.Soc.Am*, Vol. 75, pp. 241–254, 1984.
- [11] R.T.Schumacher. Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet. *Acustica*, Vol. 48, pp. 71–85, 1981.
- [12] Michiko Shimizu, Toshikatsu Naoi, and Tohru Idogawa. Vibrations of the reed and the air column in the bassoon. *J.Acoust.Soc.Jpn*, Vol. 10, , 1989.
- [13] T.Idogawa, M.Iwaki, T.Naoki, and M.Shimizu. The paper had been prepared for private circulation in The 2nd Joint Meeting of ASA and ASJ, Nov. 1988 (unpublished).

- [14] W.E.Worman. *SELF-SUSTAINED NONLINEAR OSCILLATIONS OF MEDIUM AMPLITUDE IN CLARINET-LIKE SYSTEMS*. PhD thesis, Case-Western Reserve University, 1971. unpublished.
- [15] 安藤由典. 楽器の音響学. 音楽の友社, 1971.
- [16] 井戸川徹. 最近における木管楽器の音響学的研究. 日本音響学会, Vol. 44, pp. 955-962, 1988.
- [17] 井戸川徹. 楽器の非線形振動 - 木管楽器について -. 物性研究, Vol. 55, pp. 154-176, 1990.
- [18] 井戸川徹. リード木管楽器の物理学. 日本音響学会, Vol. 49, , 1993.
- [19] 岩城正和. オーボエとクラリネットにおけるリード振動波形の測定. Master's thesis, 筑波大学.
- [20] 高橋公也, 池田研介. 管楽器吹鳴の非線形現象とその解釈をめぐって. 物性研究, Vol. 64, , 1995.
- [21] 小田隆一. デルタ型反射関数を持つ msw モデルによるクラリネットのシミュレーション, 1995. 九州工業大学卒業論文.
- [22] 小島時彦. クラリネットの発音機構. PhD thesis, 筑波大学, 1995.
- [23] 小島時彦, 井戸川徹. 私信.
- [24] 小島時彦, 井戸川徹. 研究会報告「音響系・光学系におけるカオス」. 物性研究, Vol. 62, , 1994.
- [25] 小島時彦, 井戸川徹. クラリネットに関する schumacher 方程式から得られる倍周期分岐, カオス, 及び振動状態遷移のヒステリシス. 日本音響学会誌, Vol. 51, pp. 679-689, 1995.
- [26] 小野寺健一. クラリネットに類似な系の人工吹鳴. 筑波大学卒業論文.
- [27] 池田研介. 研究会報告「音響系・光学系におけるカオス」. 物性研究, Vol. 62, , 1994.
- [28] 峰岸和弘. デルタ型反射関数を持つ msw モデルを用いたクラリネットのシミュレーション, 1996. 九州工業大学卒業論文.